



**FIZIKA, MATEMATIKA VA  
MEXANIKANING DOLZARB  
MUAMMOLARI  
XALQARO ILMIY-AMALIY  
ANJUMANI  
MATERIALLARI**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

**Buxoro - 2023**

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIIY TA‘LIM, FAN VA  
INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI  
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

**FIZIKA, MATEMATIKA VA MEKANIKA DOLZARB  
MUAMMOLARI**

xalqaro ilmiy-amaliy anjumani

## **MATERIALLARI**

**(I qism)**

Buxoro, O‘zbekiston, 24-25-may, 2023-yil

---

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И  
ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН  
БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

## **ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ**

**(Часть I)**

международной научно-практической конференции

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И  
МЕХАНИКИ**

Бухара, Узбекистан, 24-25 мая, 2023 год

---

**MINISTRY OF HIGHER EDUCATION, SCIENCE AND INNOVATIONS  
OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN  
BUKHARA STATE UNIVERSITY**

## **ABSTRACTS**

**(Part I)**

of the international scientific and practical conference

**ACTUAL PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND  
MECHANICS**

Bukhara, Uzbekistan, May 24-25, 2023

**Fizika, matematika va mexanikaning dolzarb muammolari** (Xalqaro ilmiy-amaliy konfferensiya materiallari to‘plami, I qism) Buxoro-2023, 357 bet.

Mazkur to‘plam “Fizika, matematika va mexanikaning dolzarb muammolari” Xalqaro ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari to‘plami asosida tayyorlangan bo‘lib, matematik analiz, differensial tenglamalar va matematik fizika, algebra va geometriya, hisoblash matematikasi va mexanika, geofizika va qayta tiklanuvchi energiya manbalari, kondensirlangan holatlar fizikasi, zamonaviy ta’limda raqamli texnologiyalar, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika yo‘nalishlaridagi ilmiy ma’ruzalar o‘rin olgan.

*To‘plamga kiritilgan maqola va tezislar mazmuni, ilmiyligi va dalillarining haqqoniyligi uchun mualliflar ma’suldirlar*

## TASHKILIY QO'MITA

### **Rais:**

Xamidov O.X. BuxDU rektori, professor

### **Rais o'rinbosari:**

Rasulov T.H. BuxDU prorektori, professor

Jurayev H.O. BuxDU Fizika-matematika fakulteti dekani, professor

### **Tashkiliy qo'mita a'zolari:**

Teshayev M.X. V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti Buxoro bo'linmasi, professor

Djurayev D.R. BuxDU, professor

Mirzayev Sh.M. BuxDU, professor

Qahhorov S.Q. BuxDU, professor

Boltayev Z.I. V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti Buxoro bo'linmasi, professor

Fayziyev Sh.Sh. BuxDU kafedra mudiri, dotsent

Dilmurodov E.B. BuxDU kafedra mudiri, PhD

Durdiev U.D. BuxDU kafedra mudiri, dotsent

Mirzayev M.S. BuxDU kafedra mudiri, PhD

Nuriddinov J.Z. BuxDU Fizika-matematika fakulteti dekan o'rinbosari, PhD

Turdiev H.H. BuxDU, PhD

Bozorov Z.R. V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti Buxoro bo'linmasi, PhD

## DASTURIY QO‘MITA

### **Rais:**

Durdiev D.K. V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti Buxoro  
bo‘linmasi mudiri, professor

### **Members of the organizing committee**

Laqayev S.N. SamDU kafedra mudiri, akademik  
Muqimov K.M. O‘zR FA akademigi  
G‘ulomov K.G. O‘zR FA akademigi  
Karchevsky L.A. Sobolov nomidagi matematika instituti, professor  
Mutti-Ur Rehman Sukkur IBA universiteti, professor  
Xaxo‘jayev A.M. V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti  
Samarqand bo‘linmasi mudiri, professor  
Ikromov I.A. V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti  
Samarqand bo‘linmasi mudiri, professor  
Imomkulov S.A. Navoiy davlat pedagogika instituti, professor  
Imomov A.A. Qarshi davlat universiteti, professor  
Rasulov X.R. Buxoro davlat universiteti, dotsent  
Mamurov B.J. Buxoro davlat universiteti, dotsent  
Merojova Sh.B. Buxoro davlat universiteti, PhD  
Raxmonov A.A. V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti Buxoro  
bo‘linmasi, PhD  
Raxmatov I.I Buxoro davlat universiteti, dotsent  
Saidov Q.S Buxoro davlat universiteti, dotsent  
Niyazxonova B.E Buxoro davlat universiteti, dotsent

### **Kotibiat:**

Xudayarov S.S., Turdiev H.H., Ochilov L.I, Qodirov J.R.

### **Konferensiya tashkilotchisi:**

Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti

**I SHO‘BA: MATEMATIK ANALIZ**  
**СЕКЦИЯ №1: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**  
**SECTION No.1: MATHEMATICAL ANALYSIS**

**DISCRETE SPECTRUM OF THE SCHRÖDINGER OPERATOR TO A  
SYSTEM OF THREE FERMIONS**

*Abdullaev J.I.<sup>1</sup>, Ergashova Sh.H.<sup>2</sup>*

<sup>1,2</sup>*Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan;*

*[jabdullaev@mail.ru](mailto:jabdullaev@mail.ru), [sh.ergashova@mail.ru](mailto:sh.ergashova@mail.ru)*

In this work we consider a Hamiltonian for a system of three quantum particles, three fermions with mass 1, with interacting neighboring nodes potentials  $\mu > 0$  on a lattice. In the momentum representation the total three-body Hamiltonian appears to be decomposable (see, e.g. [1],[2])

$$H_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus H_\mu(K) dK.$$

The fiber Hamiltonian  $H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$  depends parametrically on the total quasimomentum  $K \in \mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ . The corresponding three-particle Schrödinger operator

$$H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$$

acts in Hilbert space

$$L_2^{as}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^2): f(p, q) = -f(q, p) = -f(p, K - p - q),$$

where

$$(H_0(K)f)(p, q) = E_K(p, q)f(p, q),$$

$$E_K(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \varepsilon(K - p - q), \varepsilon(p) = 1 - \cos p,$$

$$(V_1 f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q - s) f(p, s) ds,$$

$$(V_2 f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(p - s) f(s, q) ds,$$

$$(V_3 f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(p - s) f(s, p + q - s) ds.$$

Two-particle Schrödinger operator  $h_\mu(k) = h_0(k) - \mu v$  corresponding two fermions acts in  $L_2^o(\mathbb{T}) := \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = -f(p)\}$  as follows [3]:

$$(h_\mu(k)f)(q) = \varepsilon_k(q)f(q) - \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin qs \sin s f(s) ds,$$

where  $\varepsilon_k(q) = \varepsilon\left(\frac{k}{2} + q\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} - q\right) = 2 - 2\cos\frac{k}{2}\cos q$ .

**Theorem 1.** Let  $\mu > 1$ . Then for all  $k \in \mathbb{T}$  the operator  $h_\mu(k)$  has a unique simple eigenvalue

$$z_\mu(k) = 2 - \mu - \frac{\cos^2 \frac{k}{2}}{\mu}$$

lying to the left of essential spectrum.

Here  $z_\mu(k)$  is zero of Fredholm determinant

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 - \frac{2\mu}{2 - z + \sqrt{(2 - z)^2 - 4\cos^2 \frac{k}{2}}}$$

corresponding to the operator  $I - \nu r_0(k, z)$ , where  $I$  is the identity operator,  $r_0(k, z)$  is the resolvent of the operator  $h_0(k)$ .

The essential spectrum of the operator  $H_\mu(K)$  coincides [1] with the union of the range of functions  $z_\mu(K - p) + \varepsilon(p)$  and  $E_K(p, q)$ .

Operator  $H_\mu(K)$  does not have eigenvalues on the right of

$$E_{max}(K) = \max_{p, q \in \mathbb{T}} E_K(p, q).$$

The problem of studying the eigenvalues of the operator  $H_\mu(K)$  is reduced to the problem of finding the fixed points of the compact self-adjoint operator  $T(K, z)$ .

The operator  $T(K, z)$  is compact, acts in the Hilbert space  $L_2(\mathbb{T})$  as follows:

$$(T(K, z)\psi)(p) = \frac{-2\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin\left(\frac{K-p}{2}-s\right) \sin\left(\frac{K-s}{2}-p\right) \psi(s) ds}{(E_K(p, s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(K-s, z-\varepsilon(s))}}$$

**Lemma 1.** A number

$$z < \tau(\mu, K) = \min_{p \in \mathbb{T}} \{z_\mu(K-p) + \varepsilon(p)\}$$

is an eigenvalue of the operator  $H_\mu(K)$  if and only if 1 is eigenvalue of  $T(K, z)$ .

**Lemma 2.** The number of eigenvalues of the operator  $H_\mu(K)$  less than  $z$  is equal to the number of eigenvalues of the operator  $T(K, z)$  greater than 1.

**Theorem 2.** There exists  $\mu_0$  such that for any  $\mu > \mu_0$  the operator  $H_\mu(\pi)$  has unique simple eigenvalue below to the essential spectrum.

### References

1. Khalkhuzhaev A.M. The essential spectrum of the three-particle discrete operator corresponding to a system of three fermions on a lattice, Russian mathematics, 9, 2017, 76-88.
2. Abdullaev J.I., Khalkhuzhaev A.M. The existence of eigenvalues of Schrodinger operator on a lattice in the gap of the essential spectrum, Journal of Physics.: Conf. Ser. 2070 012017. 2021. 12 p.
3. Abdullaev J.I., Toshturdiyev A.M. Invariant subspaces of the Schrödinger operator with a finite support potential, 43, 2021, 728-737.

## IKKI ZARRACHALI DISKRET SHREDINGER OPERATORINING SPEKTRAL XOSSALARI

*Abduxakimov S.X., Muxammadiyev I.A., Vahobov M.A.*

*Samarqand davlat universiteti, [abduxakimov93@mail.ru](mailto:abduxakimov93@mail.ru)*

Faraz qilaylik  $L^{2,0}(\mathbb{T}^2) - \mathbb{T}^2 = (-\pi, \pi]^2$  da aniqlangan toq fuksiyalarning Hilbert fazosi.

Ushbu ishida ikki o'lchamli torda bir qadamda ta'sirlashuvchi ikki fermionli sistema gamiltonianiga mos  $H_\mu(K), K \in \mathbb{T}^2$  – ikki zarrachali diskret Shredinger operatori uchun ko'paytirish funksiyasi ikkita nuqtada aynimagan minimumga ega bo'lgan holda zarrachalar ta'sir energiyasi  $\mu > 0$  dan bog'liq holda  $H_\mu(0)$  operatorning muhim spektrdan chapda xos qiymatlar soni va va joylashish o'rni topilgan.

Ikki zarrachali diskret Shredinger operatori  $H_\mu(K), K \in \mathbb{T}^2, L^{2,0}(\mathbb{T}^2)$  fazoda

$$H_\mu(K) = H_0(K) - V_\mu, \quad \mu > 0.$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda (qo'zg'almas) operator  $H_0(K)$ ,  $\varepsilon_K(p)$  funksiyaga ko'paytirish operatori

$$(H_0(K)f)(p) = \varepsilon_K(p)f(p), \quad f \in L^{2,0}(\mathbb{T}^2),$$

$$\varepsilon_K(p) = 2 \sum_{i=1}^2 \left(1 - \cos \frac{K}{2} \cos 2p_i\right),$$

va qo'zg'alish operatori  $V_\mu$ :

$$(V_\mu f)(p) = \frac{\mu}{(2\pi)^2} \sum_{i=1}^2 \sin p_i \int_{\mathbb{T}^2} \sin t_i f(t) dt, \quad f \in L^{2,0}(\mathbb{T}^2).$$

Tekshirish osonki,  $H_0(K)$  va  $V_\mu$  operatorlarning har biri chiziqli chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operatorlar. Ravshanki,  $V_\mu$  –integral operator bo'lib, rangi ikkidan oshmaydi. Muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra  $H_\mu(K)$  operatorning muhim spektri  $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$  berilgan  $\mu > 0$  parametrdan bog'liq emas va  $H_0(K)$  operatorning spektri bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) = \sigma_{\text{ess}}(H_0(K)) = \sigma(H_0(K)) = [\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{\max}(K)].$$

Faraz qilaylik

$$\mu_0 = \left( \int_{\mathbb{T}^2} \frac{(\sin t_1 \pm \sin t_2)^2 dt}{\varepsilon_0(t)} \right)^{-1} = 4.$$

$H_\mu(0)$  operatorning spektrini  $\mu$  parametrga bog'liq ravishda o'rganish uchun quyidagi to'plamlarni kiritamiz:

$$S_{<}(\mu) = \{\mu \in R^+ : \mu_0 < \mu\},$$

$$S_{=}(\mu) = \{\mu \in R^+ : \mu_0 = \mu\},$$

$$S_{>}(\mu) = \{\mu \in R^+ : \mu_0 > \mu\}.$$

**Teorema.** a) Agar  $\mu \in S_{=}(\mu)$ , yoki  $\mu \in S_{>}(\mu)$  bo'lsa,  $H_\mu(0)$  operatorning muhim spektrdan chapda xos qiymati mavjud emas.

b)  $\mu \in S_{<}(\mu)$  bo'lganda  $H_\mu(0)$  operator muhim spektrdan chapda ikki karrali  $z_\mu(0)$  xos qiymati mavjud va ushbu xos qiymatga mos xos funksiyalar quyidagi ko'rinishga ega:

$$f_\mu(q) = \frac{\mu C (\sin q_1 \pm \sin q_2)}{\varepsilon_0(q) - z_\mu(0)} \in L^{2,\theta}(\mathbb{T}^2), \theta \in \{os, oa\}$$

va o'z argumentining analitik funksiyasi bo'ladi, bunda  $C \neq 0$  – normallovchi ko'paytuvchi.

### Foydalanilgan adabiyotlar

1. S.N.Lakaev, S.Kh. Abdukhakimov. Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice, Theoretical and Mathematical Physics. – Moscow, 2020. – Vol.203. – №2. – P. 251-268

2. S.Kh. Abdukhakimov. The existence and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrödinger operators, Scientific journal of Samarkand University. – Samarkand, 2021. – №5. – P. 33-43.

## AN OPEN MAPPING THEOREM FOR ORDER - PRESERVING OPERATORS

*Aktamov Feruz Sanaqulovich*

*Chirchik state pedagogical university, Chirchik, Uzbekistan*

*[feruzaktamov28@gmail.com](mailto:feruzaktamov28@gmail.com)*

We begin with definitions of notions that will be used in the sequel.

An element  $1_E$  of an ordered real vector space  $E$  is said to be an *order unit* in  $E$  if for each  $x \in E$  there is a real number  $\varepsilon > 0$  such that  $\varepsilon 1_E \geq x$ .

In this article “spac” means “ordered real vector space”.

Recall that a subset  $L$  of a space  $E$  with an order unit  $1_E$  is said to be an  $A^{1_E}$  - *subspace* of  $E$  if  $0_E \in L$ , and  $x \in E$  implies that  $x + c1_E \in L$  for all  $c \in R$ .

The *order topology* on an ordered real vector space  $E$  with an order unit  $1_E$  is the topology whose base is the collection of balls (with center  $x$  and radius  $\varepsilon$ )

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in E : \|y - x\| < \varepsilon\}, \quad x \in E, \varepsilon > 0,$$

where for  $x \in E$

$$\|x\| = \inf \{\lambda > 0 : -\lambda 1_E \leq x \leq \lambda 1_E\}.$$

Recall that a mapping  $f : X \rightarrow Y$  between topological spaces  $X$  and  $Y$  is said to be open at  $x_0 \in X$  if for each open neighbourhood  $U$  of  $x_0$  there exists an open neighbourhood  $V$  of  $f(x_0)$ , which lies in  $f(U)$ . A mapping  $f : X \rightarrow Y$  is said to be *open* if it is open at every point  $x \in X$ , or, equivalently, if for any open set  $U$  in  $X$  its image  $f(U)$  is an open set in  $Y$ .

Let  $E, F$  be spaces with order unit. An operator  $f : E \rightarrow F$  is said to be:

(1) *order-preserving* if for any pair  $x, y \in E$  the inequality  $x \leq_E y$  implies  $f(x) \leq_F f(y)$ ;

(2) *weakly additive* if the equality  $f(x + \lambda 1_E) = f(x) + \lambda f(1_E)$  holds, for every  $x \in E$  and every  $\lambda \in R$ ;

(3) *normed*, if  $f(1_E) = 1_F$ .

We begin this section with some auxiliary results and examples.

**Lemma 1.** Let  $E$  and  $F$  be spaces with order unit,  $f : E \rightarrow F$  surjective, weakly additive order-preserving operator. If  $f$  is open at  $0_E$ , then  $f$  is open over entire  $E$ .

**Lemma 2.** The metric generated by the order norm on a space with order unit is invariant.

Recall that the graph of a mapping  $f$  of a set  $X$  into a set  $Y$  is the set of all pairs  $(x, f(x))$  in the Cartesian product  $X \times Y$ . If  $X$  and  $Y$  are topological spaces, then in their product we will consider the usual product topology.

Let  $E$  and  $F$  be spaces with order unit. The product  $E \times F$  becomes a space with order unit if one introduces on it coordinate-wise operations of addition and multiplication by a number:

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2),$$

and coordinate - wise partial order:

$$(x_1, y_1) \leq_{E \times F} (x_2, y_2) \Leftrightarrow ((x_1 \leq_E x_2) \& (y_1 \leq_F y_2)).$$

Further in this article, we will use inequality signs without any indices and will imply from the context in which set they are defined.

The order norm on  $E \times F$  is defined by the rule

$$\|(x_1, y_1)\| = \inf \{ \lambda > 0 : -\lambda(1_E, 1_F) \leq (x_1, y_1) \leq \lambda(1_E, 1_F) \}.$$

Here  $(1_E, 1_F)$  is an order unit in  $E \times F$ . So, instead of the couple  $(1_E, 1_F)$  one can use the symbol  $1_{E \times F}$ .

**Lemma 3.** Let  $E$  and  $F$  be spaces with order unit,  $1_E$  an order unit in  $E$ ,  $f : E \rightarrow F$  weakly additive, order-preserving operator. Then the graph  $G$  of operator  $f$  is an  $A^{1_{E \times f(E)}}$  - subspace in the space  $E \times f(E)$  with the order unit  $1_{E \times f(E)}$ .

**Corollary 1.** Let  $E$  and  $F$  be spaces with order unit,  $1_E$  and  $1_F$ , respectively,  $f : E \rightarrow F$  a weakly additive, order-preserving, normed operator. Then the graph  $G$  of the operator  $f$  is  $A^{1_{E \times f(E)}}$  - subspace of the space  $E \times F$  with order unit  $1_{E \times F}$ .

**Remark 1.** Note that in every topological vector space (in particular, in every space with an order unit) the only open subspace is the space itself. Unlike subspaces,  $A$  - subspaces of a space with an order unit can be open, closed, or everywhere dense.

**Proposition 1.** Let  $E$  and  $F$  be spaces with order unit, and  $f : E \rightarrow F$  be a weakly additive, order-preserving operator. Then the image  $f(E)$  is an  $A^{1_{E \times f(E)}}$ -subspace in  $F$ .

**Proof.** Since  $f(0_E) = 0_F$ , then  $0_F \in f(E)$ . Let  $y \in f(E)$ ,  $\lambda \in R$ . Then there exists a vector  $x \in E$ , such that . We have

$$y + \lambda 1_{f(E)} = f(x) + \lambda 1_{f(E)} = f(x + \lambda 1_E),$$

i.e.,  $y + \lambda 1_{f(E)} \in f(E)$ . Thus,  $f(E)$  is  $A^{1_{f(E)}}$ -subspace in  $F$ .

Finally, we formulate a version of the open mapping theorem for order-preserving operators.

**Theorem 1.** Let  $E$  be a complete space with an order unit,  $F$  be a space with order unit and of the second category. If  $f : E \rightarrow F$  is a surjective, weakly additive, order-preserving operator, then:

- (i) the mapping  $f$  is open;
- (ii)  $F$  is a complete space.

### References

1. S. Albeverio, Sh. A. Ayupov and A. A. Zaitov, On certain properties of the spaces of orderpreserving functionals, *Topology Appl.* 155(16) (2008), 1792–1799. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2008.05.019>
2. Sh. A. Ayupov and A. A. Zaitov, Slabo additivnye funkcionaly na lineĭnyh prostranstvah, *Doklady AN RUz* 4-5 (2006), 7–12.
3. Sh. A. Ayupov and A. A. Zaitov, Printsip ravnomernoĭi ogranichennosti dlya slabo additivnyh operatorov, *Uzbekskii Mat. Zh.* 4 (2006), 3–10.
4. S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne, Vol. 1, Warszawa, 1932.
5. S. Z. Ditor and L. Eifler, Some open mapping theorems for measures, *Trans. Amer. Math. Soc.* 164 (1972), 287–293.

**REGULAR DYNAMICS OF SUPERPOSITION OF NON-VOLTERRA  
QUADRATIC STOCHASTIC OPERATORS ON  $S^2$**

*Aralova K.A., Xoliqova F.Q.*

*Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy, Tashkent, Uzbekistan*

*aralovak.a@mail.ru, xoliqovafayoza8@gmail.com*

Let

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \text{for any } i, x_i \geq 0, \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

be the  $(m-1)$ -dimensional simplex. A map  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  is called a *quadratic stochastic operator*(QSO) if

$$(V\mathbf{x})_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j \quad (1)$$

for any  $\mathbf{x} \in S^{m-1}$  and for all  $k = 1, \dots, m$ , where

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k} \quad \text{for all } i, j, k; \quad \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} = 1 \quad (2)$$

The trajectory  $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  of an operator  $V$  for an initial point  $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$  is defined by

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)}) = V^{n+1}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Denote by  $\omega_V(\mathbf{x}^{(0)})$  the set of limit points of the trajectory  $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ .

A *Volterra* QSO (see [2]) is defined by (1), (2) and with the additional assumption

$$p_{ij,k} = 0, \quad k \notin \{i, j\}, \quad \text{for any } i, j, k \in E \quad (3)$$

**Definition.** A point  $\mathbf{x} \in S^{m-1}$  is called a *periodic point* of  $V$  if there exists an  $n$  so that  $V^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . The smallest positive integer  $n$  satisfying the above is called the *prime period* or *least period* of the point  $\mathbf{x}$ . A *period-one point* is called a *fixed point* of  $V$ .

Denote the set of all fixed points by  $\text{Fix}(V)$  and the set of all periodic points of (not necessarily prime) period  $n$  by  $\text{Per}_n(V)$ . Evidently that the set of all iterates of a periodic point form a periodic trajectory (orbit).

Let

$$V_0 : \begin{cases} x'_1 = x_1^2 + 2x_2x_3, \\ x'_2 = x_2^2 + 2x_1x_3, \\ x'_3 = x_3^2 + 2x_1x_2, \end{cases} \quad V_1 : \begin{cases} x'_1 = (1+\alpha)x_3x_2, \\ x'_2 = (1+\alpha)x_3x_1, \\ x'_3 = x_3^2 + (x_1+x_2)^2 + (1-\alpha)x_3(x_1+x_2). \end{cases}$$

Consider the nonlinear operator  $W_0 := V_0 \circ V_1$  defined by superposition of the operators and the operator has the form

$$W_0 : \begin{cases} x'_1 = (1+\alpha)^2 x_3^2 x_2^2 + 2(1+\alpha)(1-(1+\alpha)x_3(1-x_3))x_3x_1, \\ x'_2 = (1+\alpha)^2 x_3^2 x_1^2 + 2(1+\alpha)(1-(1+\alpha)x_3(1-x_3))x_3x_2, \\ x'_3 = (1-(1+\alpha)x_3(1-x_3))^2 + 2(1+\alpha)^2 x_1x_2x_3^2. \end{cases}$$

where  $\alpha \in [-1, 1]$ .

Let  $M_1 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 = x_2\}$ ,  $M_2 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 > x_2\}$  and  $M_3 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 < x_2\}$ .

Denote

$$t_\alpha = \sqrt[3]{(1+\alpha)\left((\alpha-2)^2 + \sqrt{6\alpha^2 - 32\alpha + 43}\right)},$$

$$x_\alpha^* = \frac{1}{3} \left( \frac{t_\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha-3}{t_\alpha} + 1 \right).$$

**Theorem.** For the operator  $W_0$  the following statements are true:

i) the sets  $M_1, M_2$  and  $M_3$  are invariant sets;

ii)  $\text{Fix}(W_0) = \begin{cases} \{\mathbf{e}_3\}, & \text{if } \alpha \leq -1/2, \\ \{\mathbf{e}_3, \mathbf{x}_\alpha^*\}, & \text{if } \alpha > -1/2, \end{cases}$  where  $\mathbf{x}_\alpha^* = \left( \frac{1-x_\alpha^*}{2}, \frac{1-x_\alpha^*}{2}, x_\alpha^* \right)$ ;

iii)  $W_0(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_3$  for any  $\mathbf{x}^{(0)} \in E_3 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_3 = 0\} \cup \{\mathbf{e}_3\}$ ;

iv) if  $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus E_3$  then  $\omega_{W_0}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} \{\mathbf{e}_3\}, & \text{if } \alpha \leq -1/2, \\ \{\mathbf{x}_\alpha^*\}, & \text{if } \alpha > -1/2. \end{cases}$

## References

1. Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. Sb. Math. 76(2), 1993, pp. 489--506.
2. Jamilov U.U. On a family of strictly non-volterra quadratic stochastic operators. Jour. Phys. Conf. Ser., 697, 2016, 012013.
3. Jamilov U.U., Khudayberdiev Kh.O, Ladra M.: Quadratic operators corresponding to permutations. Stoch.Anal.Appl. 38(5), 929-938 (2020).

## GROUND STATES FOR THE POTTS MODEL WITH COMPETING INTERACTIONS ON THE CAYLEY TREE

<sup>1</sup>Botirov G'.I., <sup>2</sup>Mustafoyeva Z.E.

<sup>1</sup>University of Exact and Social Sciences, Tashkent, Uzbekistan

<sup>2</sup>Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: [botirovg@yandex.ru](mailto:botirovg@yandex.ru), [mustafoyeva53@gmail.com](mailto:mustafoyeva53@gmail.com)

In this talk, we consider the Potts model with three spin values and with competing interactions of radius  $r = 2$  on the Cayley tree of order two. It is completely described the periodic ground states of this model.

The Cayley tree  $T^k$  of order  $k \geq 1$  is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, with exactly  $k + 1$  edges issuing from each vertex. Let  $T^k = (V, L)$  where  $V$  is the set of vertices and  $L$  the of edges. Two vertices  $x$  and  $y$  are called *nearest-neighbors* if there exists an edge  $l \in L$  connecting them and we denote  $l = \langle x, y \rangle$ . A collection of nearest neighbor pairs  $\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$  is called a *path* from  $x$  to  $y$ :

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\}.$$

For a fixed  $x^0 \in V$ , we set

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$

$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

It is well known that there exists a one-to-one correspondence between the set  $V$  of vertices of the Cayley tree of order  $k \geq 1$  and the group  $G_k$  of free products of a  $k + 1$  cyclic group of order two with the generators  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$  (see [1], [3]).

For each  $x \in G_k$ , let  $S_1(x)$  denote the set of all neighbors of  $x$ , i.e.,  $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle \in L\}$ . The set  $S_1(x) \setminus \{x\}$  is a singleton.

We consider the models in which the spin takes values in the set  $\Phi = \{1, 2, 3\}$ . A configuration  $\sigma$  on the set  $V$  is then defined as a function  $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ ; the set of all configurations coincides with  $\Omega = \Phi^V$ .

Let  $G_k^*$  be a subgroup of index  $r \geq 1$ . We consider the right coset  $G_k \setminus G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ .

**Definition 1.** A configuration  $\sigma(x)$  is said to be  $G_k^*$ -periodic if  $\sigma(x) = \sigma_i$  for all  $x \in G_k$  with  $x \in H_i$ . A  $G_k$ -periodic configuration is said to be *translation invariant*.

The Hamiltonian of the Potts model with competing interactions has the form

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{x,y \in V} \langle x, y \rangle \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

where  $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$  and

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & u = v, \\ 0, & u \neq v. \end{cases}$$

For a pair of configurations  $\sigma$  and  $\varphi$  coinciding almost everywhere, i.e., everywhere except at a finite number of points, we consider the relative Hamiltonian  $H(\sigma, \varphi)$  of the difference between the energies of the configurations  $\sigma$  and  $\varphi$ , i.e.,

$$H(\sigma, \varphi) = J_1 \sum_{x,y \in V} \langle x, y \rangle (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}) + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V \\ d(x,y)=2}} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}),$$

where  $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$  is an arbitrary fixed parameter (see [2]).

We suppose that  $M$  is the set of unit balls with vertices in  $V$ . The restriction of a configuration  $\sigma$  on a ball  $b \in M$  is called a *bounded configuration*  $\sigma_b$ . We define the energy of the configuration  $\sigma_b$  on the ball  $b$  as

$$U(\sigma_b) \equiv \frac{1}{2} J_1 \sum_{x,y \in b} \langle x, y \rangle \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y \in b \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

where  $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**Lemma 1.** The relative Hamiltonian

$$H(\sigma, \varphi) = J_1 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x, y \in V}} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}) + J_2 \sum_{\substack{x, y \in V: \\ d(x, y) = 2}} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)})$$

has the form

$$H(\sigma, \varphi) = \sum_{b \in M} (U(\sigma_b) - U(\varphi_b)).$$

It is easy to see that  $U(\sigma_b) \in \{U_1, \dots, U_6\}$  for any  $\sigma_b$ , where

$$U_1 = \frac{3}{2}J_1 + 3J_2, U_2 = J_1 + J_2, U_3 = 3J_2, U_4 = \frac{1}{2}J_1, U_5 = J_2, U_6 = \frac{1}{2}J_1 + J_2.$$

**Definition 2.** A configuration  $\varphi$  is called the *ground state* of a relative Hamiltonian  $H$  if  $U(\varphi_b) = \min\{U_1, U_2, \dots, U_6\}$  for any  $b \in M$ . We set  $C_i = \{\sigma_b : U(\sigma_b) = U_i\}$  and  $U_i(J) = U(\sigma_b, J)$  if  $\sigma_b \in C_i, i = 1, 2, \dots, 6$ .

If a ground state is a periodic configuration, then we call it a *periodic ground state* [3].

For any  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  we put

$$A_m(J) = \{J \in \mathbb{R}^2 : \min\{U_1(J), \dots, U_6(J)\} = U_m\}.$$

Quite cumbersome but not difficult calculations show that

$$\begin{aligned} A_1 &= \{J \in \mathbb{R}^2 : J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \leq 0\}, \\ A_2 &= \{J \in \mathbb{R}^2 : J_2 \geq 0, -4J_2 \leq J_1 \leq -2J_2\}, \\ A_3 &= \{J \in \mathbb{R}^2 : J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\}, \\ A_4 &= \{J \in \mathbb{R}^2 : J_2 \geq 0, -2J_2 \leq J_1 \leq 2J_2\}, \\ A_5 &= \{J \in \mathbb{R}^2 : J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\}, \\ A_6 &= \{J \in \mathbb{R}^2 : J_1 = 0, J_2 = 0\}, \end{aligned}$$

and  $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^6 A_i$ .

**Theorem 1.** For any class  $C_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  and any bounded configuration  $\sigma_b \in C_i$ , there exists a periodic configuration  $\varphi$  (on the Cayley tree) with a period  $p \leq 6$  such that  $\varphi_{b'} \in C_i$  for any  $b' \in M$  and  $\varphi_b = \sigma_b$ .

**Remark.** *There is a difference between Theorem 1 and Theorem 1 of [2], i.e., for any  $\sigma_b \in C_5$ , there exists a configuration  $\varphi$  (generally not periodic) on the Cayley tree such that  $\varphi_{b'} \in C_5$  for any  $b' \in M$  and  $\varphi_b = \sigma_b$ .*

## REFERENCES

1. U.A.Rozikov, *Gibbs Measures on the Cayley Trees*, World Sci., Singapore (2003).
2. G.I.Botirov and U.A.Rozikov, “Potts model with competing interactions on the Cayley tree: The contour method”, *Theoret. and Math. Phys.*, **153**, 1423-1433 (2007).
3. G. I. Botirov and M. M. Rakhmatullaev, “Ground states for Potts model with a countable set of spin values on a Cayley tree,” in: *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory*, Springer Proceedings in Mathematical Statistics, Vol. 264, Springer, Cham (2018), pp. 59–71.

## SOME PROPERTIES OF THE FIRST SCHUR COMPLEMENT CORRESPONDING TO A LATTICE SPIN-BOSON MODEL WITH AT MOST TWO PHOTONS

*E.B. Dilmurodov*

*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

*Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy,*

*Bukhara, Uzbekistan*

*E-mail: e.b.dilmurodov@buxdu.uz*

The spin-boson model is a well-known quantum-mechanical model which describes the interaction between a two-level atom and a photon field. We refer to [1] and [2] for excellent reviews respectively from physical and mathematical perspectives.

Let us introduce a lattice spin-boson model with at most two photons. Let  $T^d$  be the  $d$ -dimensional torus,  $L_2((T^d))$  be the Hilbert space of square integrable

(complex) functions defined on  $T^d$ ,  $\mathbb{C}^2$  be the state of the two-level atom and  $\mathcal{F}_b(L_2(T^d))$  be the symmetric Fock space for bosons, that is,

$$\mathcal{F}_b(L_2(T^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(T^d) \oplus L_2^{sym}((T^d)^2) \oplus \dots$$

Here  $L_2^{sym}((T^d)^n)$  is the Hilbert space of symmetric functions of  $n \geq 2$  variables. For  $m = 1, 2$  we denote  $\mathcal{L}_m := \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_b^{(m)}(L_2(T^d))$ , where

$$\mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(T^d), \quad \mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(T^d) \oplus L_2^{sym}((T^d)^2).$$

We write elements  $F$  of the space  $L_2$  in the form  $F = \{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}(k_1), f_2^{(s)}(k_1, k_2); s = \pm\}$ . Then the norm in  $\mathcal{L}_2$  is given by

$$\|F\|^2 := \sum_{s=\pm} \left( |f_0^{(s)}|^2 + \int_{T^d} |f_1^{(s)}(k_1)|^2 dk_1 + \frac{1}{2} \int_{(T^d)^2} |f_2^{(s)}(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2 \right). \quad (1)$$

We recall that the lattice spin-boson model with at most two photons  $A_2$  is acting in  $\mathcal{L}_2$  as the  $3 \times 3$  tridiagonal block operator matrix

$$A_2 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

where matrix elements  $A_{ij}$  are defined by

$$A_{00}f_0^{(s)} = s\varepsilon f_0^{(s)}, \quad A_{01}f_1^{(s)} = \alpha \int_{T^d} v(t) f_1^{(-s)}(t) dt,$$

$$(A_{11}f_1^{(s)})(k_1) = (s\varepsilon + w(k_1))f_1^{(s)}(k_1), \quad (A_{12}f_2^{(s)})(k_1) = \alpha \int_{T^d} v(t) f_2^{(-s)}(k_1, t) dt,$$

$$(A_{22}f_2^{(s)})(k_1, k_2) = (s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2))f_2^{(s)}(k_1, k_2),$$

$$f = \{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, f_2^{(s)}; s = \pm\} \in \mathcal{L}_2.$$

Here  $A_{ij}^*$  denotes the adjoint operator to  $A_{ij}$  for  $i < j$  with  $i, j = 0, 1, 2$ ;  $w(k)$  is the dispersion of the free field,  $\alpha v(k)$  is the coupling between the atoms and the field modes,  $\alpha > 0$  is a real number, so-called the coupling constant, real number. We assume that  $v(\cdot)$  and  $w(\cdot)$  are the real-valued continuous functions on  $T^d$ . Under

these assumptions the lattice spin-boson model with at most two photons  $A_2$  is bounded and self-adjoint in the complex Hilbert space  $\mathcal{L}_2$ .

To study the spectral properties of  $A_2$  we introduce the following two bounded self-adjoint operators  $A_2^{(s)}$ ,  $s = \pm$ , which acts in  $\mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d))$  as

$$A_2^{(s)} := \begin{pmatrix} \hat{A}_{00}^{(s)} & \hat{A}_{01} & 0 \\ \hat{A}_{01}^* & \hat{A}_{11}^{(s)} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{12}^* & \hat{A}_{22}^{(s)} \end{pmatrix}$$

with the entries

$$\hat{A}_{00}^{(s)} f_0 = s\varepsilon f_0, \quad \hat{A}_{01} f_1 = \alpha \int_{T^d} v(t) f_1(t) dt,$$

$$(\hat{A}_{11}^{(s)} f_1)(k_1) = (-s\varepsilon + w(k_1)) f_1(k_1), \quad (\hat{A}_{12} f_2)(k_1) = \alpha \int_{T^d} v(t) f_2(k_1, t) dt,$$

$$(\hat{A}_{22}^{(s)} f_2)(k_1, k_2) = (s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2(k_1, k_2), \quad (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d)).$$

It is easy to check that

$$(\hat{A}_{01}^* f_0)(k_1) = \alpha v(k_1) f_0;$$

$$(\hat{A}_{12}^* f_1)(k_1, k_2) = \alpha (v(k_1) f_1(k_2) + v(k_2) f_1(k_1)), \quad (f_0, f_1) \in \mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)).$$

In order to describe the essential spectrum of  $A_2$  we define an analytic function  $\Delta^{(s)}(\cdot)$  in  $\mathbb{C} \setminus [s\varepsilon + m; s\varepsilon + M]$  by

$$\Delta^{(s)}(\lambda) := -s\varepsilon - \lambda - \alpha^2 \int_{T^d} \frac{v^2(t) dt}{s\varepsilon + w(t) - \lambda},$$

where the numbers  $m$  and  $M$  are defined by

$$m := \min_{p \in T^d} w(p), \quad M := \max_{p \in T^d} w(p).$$

Let  $\sigma^{(s)}$  be the set of all complex numbers  $\lambda \in \mathbb{C}$  such that the equality  $\Delta^{(s)}(\lambda - w(k_1)) = 0$  holds for some  $k_1 \in T^d$ . Then for the essential spectrum of  $A_2^{(s)}$  we have

$$\sigma_{\text{ess}}(A_2^{(s)}) = \sigma^{(s)} \cup [s\varepsilon + 2m; s\varepsilon + 2M].$$

Next, we represent the space  $\mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d))$  as a direct sum of two Hilbert spaces  $\mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d))$  and  $L_2^{sym}((T^d)^2)$ , that is,  $\mathcal{F}_b^{(2)}(L_2(T^d)) = \mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)) \oplus L_2^{sym}((T^d)^2)$ . Then the first Schur complement of the operator  $A_2^{(s)}$  with respect to this decomposition is defined as

$$S_1^{(s)}(\lambda): \mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)) \rightarrow \mathcal{F}_b^{(1)}(L_2(T^d)), \quad \lambda \in \rho(\hat{A}_{22}^{(s)});$$

$$S_1^{(s)}(\lambda) := \begin{pmatrix} \hat{A}_{00}^{(s)} & \hat{A}_{01} \\ \hat{A}_{01}^* & \hat{A}_{11}^{(s)} \end{pmatrix} - \lambda - \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{A}_{12} \end{pmatrix} (\hat{A}_{22}^{(s)} - \lambda)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}_{12}^* \end{pmatrix}.$$

Define

$$S_{00}^{(s)}(\lambda) := \hat{A}_{00}^{(s)} - \lambda, \quad S_{01}^{(s)}(\lambda) := \hat{A}_{01};$$

$$S_{10}^{(s)}(\lambda) := \hat{A}_{01}^*, \quad S_{11}^{(s)}(\lambda) := \hat{A}_{11}^{(s)} - \lambda - \hat{A}_{12} (\hat{A}_{22}^{(s)} - \lambda)^{-1} \hat{A}_{12}^*.$$

Then the operator  $S_1^{(s)}(\lambda)$  has form

$$S_1^{(s)}(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{00}^{(s)}(\lambda) & S_{01}^{(s)}(\lambda) \\ S_{10}^{(s)}(\lambda) & S_{11}^{(s)}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

We study some important properties of the first Schur complement

$$S_1(\lambda) := \text{diag}\{S_1^{(+)}(\lambda), S_1^{(-)}(\lambda)\}$$

for the lattice spin-boson model with at most two photons  $A_2$ .

**Proposition 1.** *The number  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A_2)$  is an eigenvalue of the operator  $A_2$  if and only if the operator  $S_1(\lambda)$  has an eigenvalue equal to zero. Moreover, the eigenvalues  $\lambda$  and 0 have the same multiplicities.*

**Proposition 2.**  *$\lambda \in \sigma_{ess}(A_2) \setminus \sigma(A_{22})$  if and only if  $0 \in \sigma_{ess}(S_1(\lambda))$ .*

From Propositions 1 and 2 we obtain the following two corollaries.

**Corollary 1.** *Let  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A_2)$ . Then  $\lambda \in \rho(A_2) \Leftrightarrow 0 \in \rho(S_1(\lambda))$ .*

**Corollary 2.** *Let  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(A_2)$ . If  $(\lambda_0; \lambda_0 + \gamma) \in \rho(A_2)$  (resp.  $(\lambda_0 - \gamma; \lambda_0) \in \rho(A_2)$ ) for some  $\gamma > 0$ , then there exists a number  $\delta = \delta(\gamma) > 0$  such that  $(0; \delta) \in \rho(S_1(\lambda_0))$  (resp.  $(-\delta; 0) \in \rho(S_1(\lambda_0))$ ).*

We note that a lattice spin-boson model  $A_m$  with  $m = 1, 2$  is considered in [3, 4]. In particular, in [3] the location of the essential spectrum of  $A_2$  is described; for any coupling constant the finiteness of the number of eigenvalues below the bottom of the essential spectrum of  $A_2$  is established (with sketch of proof). The paper [4] is devoted to the study of the geometrical structure of the branches of the essential spectrum of  $A_2$ .

### References

1. A.J.Leggett, S.Chakravarty, A.T.Dorsey, M.P.A.Fisher, A.Garg, W.Zwerger. Dynamics of the dissipative two-state system. Rev. Mod. Phys. 59 (Jan 1987), 1–85.
2. M.Hübner, H.Spohn. Radiative decay: nonperturbative approaches. Rev. Math. Phys. 7:3 (1995), 363–387.
3. M.Muminov, H.Neidhardt, T.Rasulov. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case. Journal of Mathematical Physics, 56 (2015), 053507.
4. T.Kh.Rasulov. Branches of the essential spectrum of the lattice spin-boson model with at most two photons. Theor. Math. Phys., 186:2 (2016), 251–267.

## THE TWO ORTHOGONAL PROJECTORS IN SEPARABLE GILBERT SPACE

*M.S.Ergashova<sup>(a)</sup>, T.E.Azimova<sup>(b)</sup>, Kh.Kh.Boltaev<sup>(a)</sup>*

*<sup>(a)</sup>Tashkent State Pedagogical University named after Nizami,  
Tashkent, Uzbekistan.*

*<sup>(b)</sup>Kokan state university, Kokan, Uzbekistan.*

*[munisaergashova16199@gmail.com](mailto:munisaergashova16199@gmail.com), [azimovatoyibaxon@gmail.com](mailto:azimovatoyibaxon@gmail.com),*

*[bkhabibzhan2020@mail.ru](mailto:bkhabibzhan2020@mail.ru),*

The theory of unitary representations of groups dates back to the 19-th century and is associated with the names of G. Frobenius, I. Schur, W. Burnside, F.E. Molina

and others. In connection with proposals to quantum physics, the theory of unitary representations of topological groups, Lie groups,  $C^*$ -algebras was developed by I.M. Gelfand, M.A. Naimark, I. Segal, J. Dixmier, A.A. Kirillov and others in the 70-80s of the XX century [see. 1-3]. Later, the theory of representations of  $*$ -algebras given by generators and relations was intensively developed. Let  $\mathbf{H}$  be a Hilbert space and  $\mathbf{L}(\mathbf{H})$  be a set of continuous linear operators in  $\mathbf{H}$ . Consider a  $\mathbf{A}$  subset in  $\mathbf{L}(\mathbf{H})$  that is preserved under addition, multiplication, multiplication by scalars, and conjugation. Then  $\mathbf{A}$  is an operator  $*$ -algebra. Given an abstract  $*$ -algebra  $\mathbf{A}$ , then one of the main problems in the theory of linear representations ( $*$ -homomorphisms  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{L}(\mathbf{H})$ ) is to enumerate all its irreducible representations (up to equivalence) [see. 4-6].

**Theorem 1.** There is only one invariant expansion of  $\mathbf{H}$  with respect to  $P_1$  and  $P_2$  in the form of an orthogonal sum of subspaces

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{0,0} \oplus \mathbf{H}_{0,1} \oplus \mathbf{H}_{1,0} \oplus \mathbf{H}_{1,1} ((C^2 \oplus \mathbf{H}_\kappa)),$$

here, let there be one  $\varphi_\kappa \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\varphi_\kappa \neq \varphi_i$  ( $k \neq j$ ),  $\dim \mathbf{H}_\kappa = n_\kappa$  ( $\kappa = 1, \dots, m$ ).

$P_{i,j} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_{i,j}$  operator and  $P\varphi_\kappa : \mathbf{H} \rightarrow C^2 \oplus \mathbf{H}_\kappa$  ( $\kappa = 1, \dots, m$ ) orthoprojector for each  $\mathbf{H}_\kappa$  subspace. Then there is a unique spread of operators

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}_{0,0} \oplus \mathbf{P}_{0,1} \oplus \mathbf{P}_{1,0} \oplus \mathbf{P}_{1,1} \oplus (\oplus_{k=1}^m \mathbf{P}\varphi_\kappa),$$

$$P_1 = \mathbf{P}_{1,0} \oplus \mathbf{P}_{1,1} \oplus (\oplus_{k=1}^m \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{I}_k \right)),$$

$$P_2 = \mathbf{P}_{0,1} \oplus \mathbf{P}_{1,1} \oplus (\oplus_{k=1}^m \left( \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi_k & \cos \varphi_k \sin \varphi_k \\ \cos \varphi_k \sin \varphi_k & \sin^2 \varphi_k \end{pmatrix} \oplus \mathbf{I}_k \right)),$$

where  $\mathbf{I}_k - \mathbf{H}_\kappa$  ( $\kappa = 1, \dots, m$ ) is the unary operator.

Let  $\mathbf{H}$  be two orthoprojectors in separable Gilbert space. Then we know the spectrum of each of them:

$$P_1 = \mathbf{P}_{1,0} \oplus \mathbf{P}_{1,1} \oplus (\oplus_{k=1}^{\infty} (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_k)) \text{ and}$$

$$P_2 = \mathbf{P}_{0,1} \oplus \mathbf{P}_{1,1} \oplus (\oplus_{k=1}^{\infty} (\begin{pmatrix} \cos^2 \varphi_k & \cos \varphi_k \sin \varphi_k \\ \cos \varphi_k \sin \varphi_k & \sin^2 \varphi_k \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_k)).$$

We can irreducible the spectrum of the sum  $P_1 + P_2$  in the following representations.

**Theorem 2.** A self-adjoint operator  $A$  can be expressed as the sum of two orthoprojectors  $A = P_1 + P_2$  if  $\sigma(A) = [0, 2]$  and the space  $\mathbf{H}$  is partitioned into an orthogonal sum of invariant spaces  $A$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus (\oplus_{k=1}^{\infty} (\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{L}_2((0, \frac{\pi}{2}), d\rho_k))) \quad (1)$$

and is invariant under a change of  $\rho_k$  measures  $1+x \rightarrow 1-x$ .

Now let's look at the state of  $A = aP_1 + bP_2$  ( $0 < a < b$ ).

**Theorem 3.** A self-adjoint operator  $A$  can be expressed as a linear combination of two orthoprojectors  $A = aP_1 + bP_2$  ( $0 < a < b$ ), if  $\sigma(A) \subset [0, a] \cup [b, a+b]$  and  $\mathbf{H}$  can be expressed as an orthogonal sum of the space  $A$ .

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{(0)} \oplus \mathbf{H}_{(a)} \oplus \mathbf{H}_{(b)} \oplus \mathbf{H}_{(a+b)} \oplus (\otimes_{k=1}^{\infty} (\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{L}_2([0, a] \cup [b, a+b], d\rho_k))) \quad (4)$$

and is invariant under a change of  $\rho_k$  measures  $x \rightarrow a+b$ .

Using the example of the sum of the spectrum of orthoprojectors arranged in the case of unitary spaces, the sum of the spectrum of orthoprojectors is also found in separable Gilbert spaces.

The authors express their deep gratitude to Professor Rakhimov Abgaffar Abdumajidovich for helpful advice when working on the article.

## REFERENCES

1. Bratteli U., Robinson D. Operator algebra and quantum statistical mechanics: S\*-W\*-algebra. Gruppy is symmetrical. Razlozhenie Sostoyaniy., M., Mir, 1982.

2. Dixme J. C\*-algebray i ix predstavljeniya. M., Nauka, 1974.
3. Kirilov A.A. Elementy theory is presented. M., Nauka, 1978.
3. Murphy D. C\*-algebra and operator theory. C.-174-189, M., Mir, 1998.
4. NishioK, Linear algebra and its applications 66: 169-176 pp, Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1985.
5. Samoilenko Y.S., Representation theory of algebras, pp. 203-210, Springer, 1998.

$\mathbb{C}^n [m \times m]$  **FAZODAGI MATRITSAVIY SHAR UCHUN LORAN**

### QATORLARI

*M.H. G'ayratov<sup>1</sup>, N.A. Boboyarova<sup>2</sup>, D.S. Qutlimuratov<sup>3</sup>*

*<sup>1,2,3</sup>Urganch davlat universiteti,*

*madinagayratova@mail.ru, boboyarova@gmail.com, dilmurat87@internet.ru*

Kompleks analizda golomorf funksiyani maxsusliklarini o'rganishda, bu funksiyalarning Loran qatoriga yoyilmasi juda muhim ahamyatga ega bo'ladi. Loran qatorining ko'p o'lchovli fazolarda bir qancha analoglari mavjud. Masalan, quyidagi

$$\Pi^n = \{z = (z_1, z_n) \in \mathbb{C}^n : z \in D, r(z) < |z_n - a_n| < R(z)\} \quad (1)$$

halqalar dekart ko'paytmasida yoki "polidoiraviy halqa"da funksiyaning Loran qatori uchun quyidagi teorema o'rinli bo'ladi (qarang [1-2]).

**1-teorema.** *Agar  $f(z) \in \mathcal{O}(\Pi^n) \cap C(\overline{\Pi}^n)$  bo'lsa, u holda  $f(z)$  funksiyani  $\Pi^n$  polidoiraviy halqada quyidagi ko'rinishdagi*

$$f(z) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad (2)$$

*Loran qatoriga yoyish mumkin, bu yerda  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ,  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ -multiindeks (butun sonli vektor) va  $c_k$  koefitsiyentlar quyidagicha*

$$c_k = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta$$

$$\Gamma = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_\nu - a_\nu| = \rho_\nu, r_\nu < \rho_\nu < R_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n \right\}$$

formula bilan aniqlanadi.

Ma'lumki,  $\mathbb{C}^n [m \times m]$  fazodagi matritsaviy sohalarda analogi keltiriladi.  $\mathbb{B}_{m,n}^{(1)}$ ,  $\mathbb{B}_{m,n}^{(2)}$  va  $\mathbb{B}_{m,n}^{(3)}$  mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi tip matritsaviy sharlar mos ravishda quyidagi ko'rinishda bo'ladi (qarang [3-4])

$$\mathbb{B}_{m,n}^{(1)} = \left\{ (Z_1, \dots, Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : I - \langle Z, Z \rangle > 0 \right\},$$

$$\mathbb{B}_{m,n}^{(2)} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : I - \langle Z, Z \rangle > 0, \forall Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, \dots, n \right\},$$

va

$$\mathbb{B}_{m,n}^{(3)} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : I - \langle Z, Z \rangle > 0, \forall Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, \dots, n \right\}.$$

$\mathbb{B}_{m,n}^{(k)}$  matritsaviy sharning ostovi (Shilov chegarasi)  $\mathbb{X}_{m,n}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$  orqali belgilaymiz

$$\mathbb{X}_{m,n}^{(1)} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : \langle Z, Z \rangle = I \right\},$$

$$\mathbb{X}_{m,n}^{(2)} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : \langle Z, Z \rangle = I, Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n \right\},$$

$$\mathbb{X}_{m,n}^{(3)} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : I = \langle Z, Z \rangle, \forall Z'_\nu = -Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Shuni ta'kidlab o'tamizki yuqoridagi sharlarda, agar  $n=1, m > 1$  bo'lsa, u holda  $\mathbb{B}_{m,1}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$  – birinchi, ikkinchi va uchinchi tip klassik sohalari,  $\mathbb{X}_{m,1}^{(1)}$ ,  $\mathbb{X}_{m,1}^{(2)}$ , va  $\mathbb{X}_{m,1}^{(3)}$  – mos ravishda unitar, simmetrik unitar, kososimmetrik unitar matritsalaridir (qarang [5]).

Birinchi tip matritsaviy sharni A.G.Sergeyev va G.Xudayberganovlar o'rganishgan (qarang [3-4]). Bu sharlarda integral formulalar (Bergman, Koshi-Sege va Puasson integral formulalar) va bu formulalarni golomorf davom qildirishlar masalalarga tatbiqlari [4-8] ishlarda ketirilgan. Ushbu ishda yuqoridagi birinchi tip  $\mathbb{B}_{m,n}^{(1)}$  matritsaviy sharda Loran qatorining analoglarini hosil qilishdan ya'ni 1-teoremani analogini olishdan iborat. Buning uchun avval  $\mathbb{C}^n [m \times m]$  fazoda matritsaviy halqa tushunchasini kiritiladi va bu matritsaviy halqada Loran qatorining

analogini hosil qilish uchun Boxner Hua Lo-ken tipidagi integralning xossalariidan foydalaniladi.

### ADABIYOTLAR RO'XHATI

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч.2. М.: Наука. 3–е изд., 1985 г. 464 с.
2. Sergeev A.G. On matrix and Reinhardt domains. // Preprint, Inst. Mittag–Leffler, Stockholm, 7 pp. (1988).
3. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Красноярск. 2017.-292 с.
4. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959. – 163 с.
5. Khudayberganov G., Rakhmonov U.S., Matyakubov Z.Q. Integral formulas for some matrix domains. // Contemporary Mathematics, AMS, Volume 662, 2016, pp. 89-95.
6. Khudayberganov G., Abdullayev J.Sh. Relationship between the Kernels Bergman and Cauchy-Szegö in the domains  $\tau^+_{n-1}$  and  $\mathbb{R}_{IV}^n$ . // Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics, 13:5, 559-567(2020).
7. Khudayberganov G. Abdullayev J.Sh. About the possibility of holomorphic continuation to the matrix ball of functions defined on a piece of its skeleton. // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki vol. 31, issue 2 (2021), pp. 296-310.
8. Rakhmonov U.S., Abdullayev J.Sh., On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls. // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki 2019, vol. 29, issue 4, pp. 548-557.

**GRADIENT GIBBS MEASURES OF SOS MODEL WITH ALTERNATING  
MAGNETISM ON CAYLEY TREE: 3 – PERIODIC, MIRROR SYMMETRIC  
BOUNDARY LAW**

*Haydarov F.H.<sup>1</sup>, Ilyasova R.A.<sup>2</sup>*

<sup>1,2</sup>*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

<sup>1</sup>*haydarov\_imc@mail.ru, <sup>2</sup>ilyasova.risolat@mail.ru*

**Definition 1.** A family of vectors  $\{l_{xy}\}_{\langle x,y \rangle \in L}$  with  $\{l_{xy}\} = (l_{xy}(i): i \in Z) \in (0, \infty)^Z$  is called a boundary law for the transfer operators  $\{Q_b\}_{b \in L}$  if for each  $\langle x, y \rangle \in L$  there exists a constant  $c_{xy} > 0$  such that the consistency equation

$$l_{xy}(i) = c_{xy} \prod_{y \in \partial x \setminus \{y\}} \sum_{j \in Z} Q_{zx}(i, j) l_{zx}(j)$$

holds for every  $i \in Z$ . A boundary law is called  $q$ -periodic if  $l_{xy}(i + q) = l_{xy}(i)$  for every edge  $\langle x, y \rangle \in L$  and each  $i \in Z$ .

**Definition 2.** A boundary law  $l$  is said to be normalisable if and only if

$$\sum_{i \in Z} \prod_{z \in \partial x} \sum_{j \in Z} Q_{zx}(i, j) l_{zx}(j) < \infty$$

at any  $x \in V$ .

**SOS model with alternating magnetism.** We will consider Hamiltonian of SOS model, with alternating magnetism, i.e.,

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle, x,y \in V} \alpha(|\sigma(x) - \sigma(y)|) |\sigma(x) - \sigma(y)|, \quad (1)$$

where  $J \in R_+$ ,  $\sigma: x \in V \rightarrow \sigma(x) \in Z$  and

$$\alpha(|m|) = \begin{cases} 1, & \text{if } m \in 2Z \\ -1, & \text{if } m \in 2Z + 1. \end{cases}$$

Let  $\beta > 0$  be inverse temperature and  $\theta = \exp(-J\beta) < 1$ . The transfer operator  $Q$  then reads  $Q(i - j) = \theta^{\alpha(|i-j|)|i-j|}$  for any  $i, j \in Z$ , and translation invariant boundary law, denoted by  $z$ , is any positive function on  $Z$  solving the consistency equation, whose values we will denote by  $z_i$ . By definition of boundary law it is only

unique up to multiplication with any positive prefactor. Hence we may choose this constant in a such way that we have  $z_0 = 1$ .

Set  $Z_0 = Z \setminus \{0\}$ . Then boundary law equation (for translation-invariant case) of SOS model with alternating magnetism on Cayley tree reads

$$z_i = \left( \frac{Q(i,0) + \sum_{j \in Z_0} Q(i,j)z_j}{Q(0,0) + \sum_{j \in Z_0} Q(0,j)z_j} \right)^k, \quad (2)$$

where  $k$  is the order of Cayley tree.

This system (1) can be written as

$$z_i = \left( \frac{\theta^{\alpha(|i|)|i| + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|i-j|)|i-j|} z_j}{1 + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|j|)|j|} z_j} \right)^k. \quad (3)$$

It is clear that  $C = \frac{1}{(Q(0,0) + \sum_{j \in Z_0} Q(0,j)z_j)^k}$  is a constant positive real number. Denoting

$u_i = \sqrt[k]{z_i}$ , the system of equations (3) will be in the following form:

$$u_i = C \left( \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{-2j+1} u_{i+2j-1}^k + \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{2j} u_{i+2j}^k + u_i^k + \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{-2j+1} u_{i-2j+1}^k + \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{2j} u_{i-2j}^k \right). \quad (4)$$

**Proposition 1.** If  $z_0 = 1$  ( $u_0 = 1$ ) then the equation (3) is equivalent to the following

$$u_{i+2} = \frac{u_{-2} + u_2 + 2 - \tau^2}{u_1^k + u_{-1}^k - \tau} (u_{i+1}^k + u_{i-1}^k - \tau u_i^k) + (\tau^2 - 2)u_i - u_{i-2}, \quad (5)$$

where  $\tau = \theta^{-1} + \theta$ .

In general, solutions of (5) are not known and  $(\dots, 1, 1, 1, \dots)$  is a solution independently of the parameters  $(\tau, k)$ . But in class of periodic solutions some results are obtained. The 3 – periodic, mirror symmetric sequence has the form:

$$\dots, 1, a, a, 1, a, a, 1, a, a, 1, a, a, 1 \dots \quad (6)$$

where  $a$  is some positive real number.

Then from (5) for  $a$  we get the following equation:

$$(2\tau^2 - 2\tau - 4)a^{k+1} + (\tau^3 - \tau^2 - 2\tau)a^k + (-\tau^3 + 3\tau + 2)a - \tau^2 + \tau + 2 = 0. \quad (7)$$

The equation (7) has the solution  $a = 1$  independently of the parameters  $(\tau, k)$ .

Dividing both sides of (7) by  $(\tau + 1)(\tau - 2)$  we get

$$2a^{k+1} + \tau a^k - (\tau + 1)a - 1 = 0. \quad (8)$$

It is well-known (see [5], p.28) that the number of positive roots of the polynomial (8) does not exceed the number of sign changes of its coefficients. Therefore, there is no positive solution of the polynomial (8).

**Theorem 1.** For SOS model (1) (zero external field) with alternating magnetism on the Cayley tree of order  $k$  and for any value of parameter  $\tau$  there is exactly one 3-height-periodic mirror symmetric GGM.

### REFERENCES

1. U.A.Rozikov: Gibbs measures on Cayley trees, World Sci. Pub, Singapore (2013).
2. U.A.Rozikov: Mirror Symmetry of Height-periodic Gradient Gibbs Measures of an SOS model on Cayley trees. Electron. Journal of Statistical Physics (2022), 26 pp.
3. S.Friedli, Y.Velenik: Statistical Mechanics of Lattice Systems, Cambridge University Press (2017).
4. F.Henning, C.Kulske, A. Le Ny, U.A.Rozikov: Gradient Gibbs measures for the SOS model with countable values on a Cayley tree. Electron. J.Probab.24 (2019), Paper No. 104, 23 pp.
5. V.V.Prasolov: Polynomials. Springer, Berlin, 2004
6. F.H. Haydarov, U.A. Rozikov: Gradient Gibbs measures of a SOS model on Cayley trees: 4-periodic boundary laws(arXiv:2110.10078)[math-ph]

### ON THE ESTIMATES FOR FOURIER TRANSFORM OF SURFACE-CARRIED MEASURE

*Ikromova D.I.*

*Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan.*

*ikromova-dildora@samdu.uz*

Let  $S \subset \mathbb{R}^3$  be a smoothy surface given by the graph of a smooth function e.g.

$$S = \{(x_1, x_2, x_3): x_3 = \Phi(x_1, x_2)\},$$

where  $\Phi$  is a smooth function defined in a neighborhood  $U \subset \mathbb{R}^2$  of the origin and also, we assume that  $\Phi(0,0) = 0$  and  $\nabla\Phi(0,0) = 0$ .

Consider the integral

$$J(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 \Phi(x_1, x_2))} a(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

where  $a \in C_c^\infty(U)$  is a smooth function supported in  $U$ . We consider the problem, to find minimal  $p$  such that, the Fourier transform  $J \in L^p(\mathbb{R}^3)$ .

We will assume that, the density  $a$  is supported in a sufficiently small neighborhood of the origin  $\mathbb{R}^2$  and also, it is supposed that, the surface  $S$  in a sufficiently small neighborhood of the origin is given as the graph of a smooth function  $x_3 = \Phi(x_1, x_2)$ , satisfying the conditions:  $\Phi(0,0) = 0, \nabla\Phi(0,0) = 0$  and also  $h(\Phi) < 2$ , where  $h(\Phi)$  is the height of the function  $\Phi$  introduced by A.N.Varchenko [4].

In this case the function is diffeomorphic equivalent to functions having simple singularities of Arnolds type [1]. But in the problem under consideration, we need to have the form of these functions with respect to a linear change of variables.

The main results of the work are contained in the following theorem:

**Theorem.** Let  $S \subset \mathbb{R}^3$  be a smooth hypersurface given as the graph of a function  $x_3 = \Phi(x_1, x_2)$ , where  $\Phi$  satisfying the following conditions:

- (i)  $\Phi(0,0) = 0, \nabla\Phi(0,0) = 0$ ;
- (ii)  $\Phi$  has a singularity of the type  $E_7$ .

Then there is a neighborhood  $U$  of the origin such that for all  $\varphi \in C_0^\infty(U)$  the inclusion  $\widehat{d\mu} \in L^{3+0}(\mathbb{R}^3)$  holds true, where  $L^{3+0}(\mathbb{R}^3) := \bigcap_{p>3} L^p(\mathbb{R}^3)$ .

Sharpness of the main theorem follows from the following proposition [2]:

**Proposition 1.** Let  $S \subset \mathbb{R}^3$  be a  $C^2$  smooth hypersurface containing the origin, let  $\widehat{d\mu}$  be the measure defined by

$$\widehat{d\mu}(\xi) := \int_S e^{i\chi\xi} d\mu(\chi),$$

and let  $\varphi$  be a nonnegative continuous function concentrated in a sufficiently small neighborhood of zero such that  $\varphi(0) > 0$ . Then  $\widehat{d\mu} \notin L^p(\mathbb{R}^3)$  for any  $1 \leq p \leq 3$ .

The following statement is an analogy of proposition 211 of the book [3](p.46). It will be used in the proof of the Main Theorem.

**Proposition 2.** Let  $\Phi$  be a smooth function satisfying the conditions:  $\Phi(0,0) = 0, \nabla\Phi(0,0) = 0$  and also  $h(\Phi) < 2$ . In addition, the Taylor development of the function  $\Phi$  has the form  $\Phi = (c_1x_1 + c_2x_2)^3 + \dots$  where  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  with  $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$  “...” means sum of monomials with degree bigger then 4. Then there is a linear coordinate system in  $\mathbb{R}^2$  such that this function can be written in one of the following forms:

$$\Phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - \psi(x_1))^3 + x_2b_1(x_1) + b_0(x_1),$$

where  $b, b_1, b_2$  and  $\psi$  are smooth functions, also  $\psi(0) = \psi'(0) = 0$  as well as  $b(0,0) \neq 0$  and  $b_1(x_1) = x_1^{k_1}\beta_1(x_1), b_0(x_1) = x_1^{k_0}\beta_0(x_1)$ . Here  $\beta_1, \beta_0$  are smooth functions. Moreover either:

- (i)  $k_0 = 4, k_1 \geq 4$  and also  $\beta_0(0) \neq 0$  (singularity of type  $E_6$ ); or
- (ii)  $k_0 \geq 5, k_1 = 3$  and also  $\beta_1(0) \neq 0$  (singularity of type  $E_7$ ); or
- (iii)  $k_0 = 5, k_1 \geq 5$  and also  $\beta_0(0) = 0$  (singularity of type  $E_8$ ).

## References

1. V.I.Arnol'd, A.N.Varchenko and S.M.Gusein-zade, “Singularities of differentiable mappings in classification of critical points of causties and wavefronts ” (Nauka, Moscow, 1982). Vol.1[in Russian].

2. D.I.Akramova and I.A.Akramov “Randol maximal functions and the integrability of the Fourier transform of measure”, Math.Notes. Vol 109, No 5, pp.661-678. (2021).

3. I.A.Ikromov, D.Müller, “Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra;” Annals of Mathematics Studies 194, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2016.

4. A.N.Varchenko, “Newton polyhedra and estimates of oscillating integral ” Funkcional. Anal. I Prilozeniya, 10 (1976), 13-38(Russion); English translation in Funkcional. Anal. Appl., 18(1976), 175(196).

**LOCATION OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF THE CHANNEL  
OPERATOR CORRESPONDING TO THE THIRD-ORDER OPERATOR  
MATRIX IN THE FERMIONIC FOCK SPACE**

*Ismoilova Dildora Erkinovna*

*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

*d.e.ismoilova@buxdu.uz*

Denote by  $\mathbb{C}$  the one-dimensional complex space, by  $L_2(\mathbb{T}^d)$  the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on  $\mathbb{T}^d$  and by  $L_2^{as}((\mathbb{T}^d)^2)$  the Hilbert space of antisymmetric square integrable (complex) functions defined on  $(\mathbb{T}^d)^2$ , that is,  $f(p, q) = -f(q, p)$  for all  $p, q \in \mathbb{T}^d$

For convenience, we introduce the following spaces:

$$\mathcal{F}_a^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d);$$

$$\mathcal{F}_a^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d) \oplus L_2^{as}((\mathbb{T}^d)^2);$$

$$\mathcal{F}_a(L_2(\mathbb{T}^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d) \oplus L_2^{as}((\mathbb{T}^d)^2) \oplus \dots$$

**Definition 1.**  $\mathcal{F}_a(L_2(\mathbb{T}^d))$  is called a fermionic Fock space over  $L_2(\mathbb{T}^d)$ ,  $\mathcal{F}_a^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ ,  $m = 1, 2$  is  $m+1$  -particle cut subspace of fermionic Fock space ,  $\mathcal{H}_n$ ,  $n = 0, 1, 2$  space is called the  $n$ -particle subspace of a fermionic Fock space.

Let

$$\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}, \mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^d), \mathcal{H}_2 := L_2^{as}((\mathbb{T}^d)^2).$$

We consider the third-order operator matrix defined as

$$\mathcal{A}_{\mu,\lambda} := \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} & 0 \\ \mu A_{01}^* & A_{11} & \mu A_{12} \\ 0 & \mu A_{12}^* & A_{22}^0 - \lambda V \end{pmatrix} \quad (1)$$

in the Hilbert space  $\mathcal{F}_a^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ . Here the matrix elements  $A_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i, i, j = 0, 1, 2$  are defined by:

$$A_{00}f_0 = \omega_0 f_0, \quad A_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_1(t) dt,$$

$$(A_{11}f_1)(p) = \omega_1(p) f_1(p), \quad (A_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_2(p, t) dt,$$

$$(A_{22}^0 f_2)(p, q) = \omega_2(p, q) f_2(p, q), \quad V := V_1 + V_2,$$

$$(V_1 f_2)(p, q) = \varphi(q) \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(t) f_2(p, t) dt, \quad (V_2 f_2)(p, q) = \varphi(p) \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(t) f_2(t, q) dt.$$

Here  $\mu, \lambda$  are real positive numbers,  $\omega_0$  is a fixed real number, functions  $\omega_1(\cdot), v(\cdot)$  and  $\varphi(\cdot)$  are real-valued continuous functions on  $\mathbb{T}^d$ , and  $\omega_2(\cdot, \cdot)$  is a real-valued symmetric continuous function on  $(\mathbb{T}^d)^2$ .

Operator matrix  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}, \mu, \lambda > 0$  acting by formula (1) in the Hilbert space  $\mathcal{F}_a^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d))$  is linear, bounded and self-adjoint operator.

We introduce the following designations:

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 := \mathcal{H}_1, \quad \widehat{\mathcal{H}}_2 := L_2((\mathbb{T}^d)^2), \quad \widehat{\mathcal{H}} := \widehat{\mathcal{H}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_2.$$

We consider the second-order operator matrix defined as

$$\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}} := \begin{pmatrix} A_{11} & (\mu/\sqrt{2})A_{12} \\ (\mu/\sqrt{2})A_{12}^* & A_{22}^0 - \lambda V_1 \end{pmatrix}$$

in the Hilbert space  $\widehat{\mathcal{H}}$  and called channel operator, which plays an important role in the analysis of the spectrum of the operator matrix  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}$ .

It can be easily verified that the channel operator  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}$  is linear, bounded and self-adjoint in the Hilbert space  $\widehat{\mathcal{H}}$ .

We consider the generalized Friedrichs model [1]-[3]  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k), k \in \mathbb{T}^d$  acting in the space  $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  as

$$\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}^0(k) - \lambda v \end{pmatrix}.$$

Here

$$\begin{aligned} A_{00}(k)f_0 &= \omega_1(k)f_0, & (A_{11}^0(k)f_1)(q) &= \omega_2(k, q)f_1(q), \\ (vf_1)(q) &= \varphi(q) \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(t)f_1(t)dt. \end{aligned}$$

For any  $k \in \mathbb{T}^d$  we define an analytic function

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu,\lambda}(k; z) &= \left( 1 - \lambda \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\varphi^2(t)dt}{\omega_2(k, t) - z} \right) \left( \omega_1(k) - z - \frac{\mu^2}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)dt}{\omega_2(k, t) - z} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda\mu^2}{2\sqrt{2}} \left( \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v(t)\varphi(t)dt}{\omega_2(k, t) - z} \right)^2 \end{aligned}$$

in  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k))$ . The function  $\Delta_{\mu,\lambda}(k; z)$  usually called the Fredholm determinant corresponding to the operator matrix  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k)$ .

**Lemma 1.** For any  $\mu, \lambda > 0$  and  $k \in \mathbb{T}^d$  the operator  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k)$  has an eigenvalue  $z_{\mu,\lambda}(k) \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k))$  if and only if  $\Delta_{\mu,\lambda}(k, z) = 0$ .

From Lemma 1 it follows that for the discrete spectrum of  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k)$  the equality

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k)) : \Delta_{\mu,\lambda}(k, z) = 0\}, k \in \mathbb{T}^d$$

holds.

We introduce the following notations:

$$\sigma_{\text{two}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}) = \bigcup_{k \in \mathbb{T}^d} \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(k)), \quad \sigma_{\text{three}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}) = [m; M],$$

where

$$m := \min_{k, q \in \mathbb{T}^d} \omega_2(k, q), \quad M = \max_{k, q \in \mathbb{T}^d} \omega_2(k, q).$$

**Theorem 1.** The spectrum  $\sigma(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}})$  of the channel operator  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}$  satisfies the following equality

$$\sigma(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}) = \sigma_{\text{two}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}) \cup \sigma_{\text{three}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}).$$

**Theorem 2.** The essential spectrum  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda})$  of the operator matrix  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}$  coincides with the spectrum  $\sigma(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}})$  of the channel operator matrix  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}}$ , i.e.  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}) = \sigma(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}})$ .

**Definition 2.** The sets  $\sigma_{\text{two}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}})$  and  $\sigma_{\text{three}}(\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{\text{ch}})$  are called two- and three-particle branches of the essential spectrum of the operator matrix  $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}$ , respectively.

### References:

1. S.Albeverio, S.N.Lakaev, T.H.Rasulov. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics. J.Stat. Phys.127 (2007), no.2,191–220.
- 2.S.Albeverio, S.N.Lakaev, T.H.Rasulov. The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles. Methods Funct. Anal. Topology 13 (2007), no. 1, 1–16.
- 3.T.Kh.Rasulov. On the number of eigenvalues of a matrix operator. Siberian Math. J. 52 (2011), no. 2, 316–328.

## ON TRAJECTORIES OF A NON-VOLTERRA QUADRATIC STOCHASTIC OPERATOR

**U. U. Jamilov, Kh. O. Khudoyberdiev**

*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematic, Tashkent, Uzbekistan*

*e-mail: [jamilovu@yandex.ru](mailto:jamilovu@yandex.ru), e-mail: [xudoyberdiyev.x@mail.ru](mailto:xudoyberdiyev.x@mail.ru)*

Let

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

$(m-1)$ - dimensional simplex. A map  $V$  of  $S^{m-1}$  into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j \quad (1)$$

for any  $x \in S^{m-1}$  and for all  $k = 1, \dots, m$  where

$$p_{ij,k} \geq 0, p_{ij,k} = p_{ji,k}, \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1. \quad (2)$$

A quadratic stochastic operator is called a Volterra operator if

$$p_{ij,k} = 0, \text{ for any } k \notin \{i, j\}, i, j, k = 1, \dots, m.$$

The trajectory  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{n=\infty}$  of an operator  $V$  for an initial point  $x \in S^{m-1}$  is defined by  $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$  for all  $n = 0, 1, 2, \dots$ , with  $x^{(0)} = x$ . Denote by  $\omega_V(x^{(0)})$  the set of limit points of the trajectory  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{n=\infty}$ . The asymptotic behaviour of trajectories Volterra QSOs was analysed in [2]

**Definition 1.** A point  $x \in S^{m-1}$  is called a *periodic point* of  $V$  if there exists an  $n$  so that  $V^n(x) = x$ . The smallest positive integer  $n$  satisfying the above is called the prime period or least period of the point  $x$ . A period-one point is called a *fixed point* of  $V$ .

Denote the set of all fixed points by  $Fix(V)$  and the set of all periodic points of (not necessarily prime) period  $n$  by  $Per_n(V)$ . Let  $D(V(x^*)) = (\partial V_i / \partial x_j)(x^*)$  be a Jacobian of  $V$  at the point  $x^*$ .

**Definition 2.** [1] A *fixed point*  $x^*$  is called hyperbolic if its Jacobian  $D(V(x^*))$  has no eigenvalues on the unit circle. A hyperbolic fixed point  $x^*$  is called:

*i) attracting*, if all the eigenvalues of the Jacobian  $D(V(x^*))$  are less than 1 in absolute value;

*ii) repelling*, if all the eigenvalues of the Jacobian  $D(V(x^*))$  are greater than 1 in absolute value;

iii) a saddle, otherwise.

We let  $\text{int}S^{m-1}$  denote the interior of  $S^{m-1}$  be the set  $\text{int}S^{m-1} = \{x \in S^{m-1} : x_1 x_2 \cdots x_m > 0\}$

and a face of the simplex  $S^{m-1}$  be the set  $\Gamma_I = \{x \in S^{m-1} : x_i = 0, i \notin I \subset \{1, 2, \dots, m\}\}$ .

Let us consider a non-Volterra QSO defined on the two-dimensional simplex which has the form

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 + (1 - \alpha)x_1 x_2 + (1 - \beta)x_1 x_3, \\ x_2' = (1 + \beta)x_1 x_3, \\ x_3' = (1 + \alpha)x_1 x_2, \end{cases} \quad (3)$$

where  $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ .

**Proposition 1.** For the QSO (3) the following statements are true:

i)  $\text{Fix}(V) = \begin{cases} \{e_1\} & \text{if } \alpha + \beta + \alpha\beta \leq 0, \\ \{e_1, \tilde{x}\} & \text{if } \alpha + \beta + \alpha\beta > 0. \end{cases}$  where  $e_1 = (1, 0, 0)$  and

$$\tilde{x} = \left( \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}, \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)} - 1}{\sqrt{(1+\alpha)(\sqrt{(1+\alpha)+\sqrt{(1+\beta)})}}}, \frac{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)} - 1}{\sqrt{(1+\beta)(\sqrt{(1+\alpha)+\sqrt{(1+\beta)})}} \right).$$

ii) The fixed point  $\tilde{x}$  is a non-hyperbolic and

$$e_1 \text{ has the type a (an) } \begin{cases} \text{attracting,} & \text{if } \alpha + \beta + \alpha\beta < 0, \\ \text{non-hyperbolic,} & \text{if } \alpha + \beta + \alpha\beta = 0, \\ \text{repelling,} & \text{if } \alpha + \beta + \alpha\beta > 0. \end{cases}$$

Let  $x_{\alpha\beta} := \frac{\theta}{6\sqrt[3]{(1+\alpha)(1+\beta)^2}} + \frac{2\sqrt[3]{(1+\alpha)}(\beta-2)}{3\theta\sqrt[3]{(1+\beta)}} + \frac{1}{3}$  where  $\alpha \neq -1, \beta \neq -1,$

$$\theta = \sqrt[3]{4\beta(1+\alpha)(2\beta-5) - 4(7\alpha-20) + 12\sqrt{3(4-\alpha\beta)(2-\alpha)(2-\beta) + 9(\alpha-\beta)^2}}.$$

Consider the functions

$$f_\alpha(x) = (1+\alpha)x^2 - (1+\alpha)x + 1, \quad f_\beta(x) = (1+\beta)x^2 - (1+\beta)x + 1, \quad x \in [0, 1],$$

$$f_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(f_\beta(x)) = (1+\alpha)(1+\beta)\left((1+\beta)x^4 - 2(1+\beta)x^3 + (2+\beta)x^2 - x\right) + 1, \quad x \in [0, 1].$$

We define  $f_{\alpha\beta}^n = \underbrace{f_{\alpha\beta} \circ \cdots \circ f_{\alpha\beta}}_{n \text{ times}}$  to be the  $n$ -fold composition of  $f_{\alpha\beta}$  with itself.

**Proposition 2.** For the function  $f_{\alpha\beta}(x)$  the following statements are true:

i) if  $\alpha + \beta + \alpha\beta \leq 0$  then  $\text{Fix}(f_{\alpha\beta}) = \{x=1\}$  and if  $\alpha + \beta + \alpha\beta > 0$  then

$$\text{Fix}(f_{\alpha\beta}) = \{x=1, x^* = x_{\alpha\beta}\};$$

ii) if  $\alpha + \beta + \alpha\beta < 0$  then  $x=1$  is attracting; if  $\alpha + \beta + \alpha\beta = 0$  then  $x=1$  is non-hyperbolic and if  $\alpha + \beta + \alpha\beta > 0$  then  $x=1$  is repelling; the fixed point  $x^*$  is attracting when  $\alpha + \beta + \alpha\beta > 0$ ;

iii) for any value  $n \geq 2$  the function  $f_{\alpha\beta}(x)$  has no  $n$ -periodic points, different from fixed points;

iv) if  $\alpha + \beta + \alpha\beta \leq 0$  then  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha\beta}^n(x) = 1$  for any  $0 \leq x \leq 1$ ;

iv) if  $\alpha + \beta + \alpha\beta > 0$  then  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha\beta}^n(x) = x^*$  for any and  $f_{\alpha\beta}(0) = f_{\alpha\beta}(1) = 1$ .

For any  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in S^2 \setminus \{e_1\}$  we denote

$$\gamma = \frac{(1+\alpha)x_2^{(0)} + (1+\beta)x_3^{(0)}}{x_2^{(0)} + x_3^{(0)}}, \quad \delta = \frac{(1+\alpha)(1+\beta)(x_2^{(0)} + x_3^{(0)})}{(1+\alpha)x_2^{(0)} + (1+\beta)x_3^{(0)}}, \quad \hat{x}_{\delta\gamma} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3), \quad \hat{x}_1 = x_{\delta\gamma}$$

$$\hat{x}_2 = \frac{x_2^{(0)}}{x_2^{(0)} + x_3^{(0)}}(1 - x_{\delta\gamma}), \quad \hat{x}_3 = \frac{x_3^{(0)}}{x_2^{(0)} + x_3^{(0)}}(1 - x_{\delta\gamma}), \quad \tilde{x}_{\delta\gamma} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), \quad \tilde{x}_1 = 1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3, \quad \tilde{x}_2 = (1+\beta)\hat{x}_1\hat{x}_3,$$

$$\tilde{x}_3 = (1+\alpha)\hat{x}_1\hat{x}_2, \quad y_{\alpha\beta} = (x_{\alpha\beta}, 0, 1 - x_{\alpha\beta}) \quad \text{and} \quad z_{\alpha\beta} = (f_{\beta}(x_{\alpha\beta}), 1 - f_{\beta}(x_{\alpha\beta}), 0).$$

**Theorem 1.** For the  $V$ -QSO (3) the following statements are true:

$$\omega(x^{(0)}) = \begin{cases} \{e_1\}, & \text{if } x^{(0)} \in S^2 \text{ and } \alpha = -1 \text{ or } \beta = -1, \\ \{e_1\}, & \text{if } x^{(0)} \in \Gamma_{\{2,3\}} \cup \{e_1\} \text{ and } -1 \leq \alpha, \beta \leq 1, \\ \{e_1\}, & \text{if } x^{(0)} \in S^2 \setminus (\Gamma_{\{2,3\}} \cup \{e_1\}) \text{ and } \alpha + \beta + \alpha\beta < 0, \\ \{y_{\alpha\beta}, z_{\alpha\beta}\}, & \text{if } x^{(0)} \in (\Gamma_{\{1,2\}} \cup \Gamma_{\{1,3\}}) \setminus \{e_1\} \text{ and } \alpha + \beta + \alpha\beta > 0, \alpha, \beta \in (-1, 1], \\ \{\hat{x}_{\delta\gamma}, \tilde{x}_{\delta\gamma}\}, & \text{if } x^{(0)} \in \text{int}S^2 \text{ and } \alpha + \beta + \alpha\beta \leq 0, \alpha, \beta \in (-1, 1]. \end{cases}$$

## References

1. R.L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Studies in Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO, 2003.
2. R.N. Ganikhodzhaev, Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. *Sb. Math.* **76** (2) (1993), pp. 489 – 506.

3. U.U. Jamilov, Kh.O., Khudoyberdiev, An  $(\alpha, \beta)$ quadratic stochastic operator acting in  $S^2$ . Jour.Appl. Nonlin. Dyn. **11** (4) (2022) 777–788.

## NON-ERGODICITY OF LOTKA-VOLTERRA OPERATORS

<sup>1</sup>Uygun Jamilov, <sup>2</sup>Ramazon Mukhitdinov

<sup>1</sup>V.I. Romanovski Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,

e-mail: [uygun.jamilov@mathinst.uz](mailto:uygun.jamilov@mathinst.uz)

<sup>2</sup>Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan,

e-mail: [muxitdinov-ramazon@rambler.ru](mailto:muxitdinov-ramazon@rambler.ru)

Let  $E = 1, \dots, m$  be a finite set and the set of all probability distributions on  $E$

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

$(m-1)$ - dimensional simplex.

A map  $V$  of  $S^{m-1}$  into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j \quad (1)$$

for any  $x \in S^{m-1}$  and for all  $k = 1, \dots, m$  where

$$p_{ij,k} \geq 0, p_{ij,k} = p_{ji,k}, \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1. \quad (2)$$

A quadratic stochastic operator is called a Volterra operator if

$$p_{ij,k} = 0, \text{ for any } k \notin \{i, j\}, i, j, k = 1, \dots, m.$$

The trajectory  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{n=\infty}$  of an operator  $V$  for an initial point  $x \in S^{m-1}$  is defined by  $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$  for all  $n = 0, 1, 2, \dots$ , with  $x^{(0)} = x$ .

Denote by  $\omega_V(x^{(0)})$  the set of limit points of the trajectory  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{n=\infty}$ .

A QSO  $V$  is called regular if there is the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} V^n(\mathbf{x})$  for any initial  $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ .

A QSO  $V$  is said to be ergodic if the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} V^k(\mathbf{x})$  exists for any  $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ .

On the basis of numerical calculations Ulam, conjectured that the any QSO is ergodic [3]. But in 1977 in [4], Zakharevich considered the following QSO on  $S^2$

$$x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2, \quad x_2' = x_2^2 + 2x_2x_3, \quad x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3 \quad (3)$$

and showed that it is a non-ergodic transformation, that is he proved that Ulam's conjecture is false in general. The Zakharevich's QSO (3) is called the Stein Ulam Spiral map in some references. Later in [1] established anecessary condition for a QSO defined on  $S^2$  to be a non-ergodic transformation, that is Zakharevich's result

was generalized to a class of Volterra QSOs defined on  $S^2$ .

A discrete-time Kolmogorov system  $\Psi: R_+^m \rightarrow R_+^m$  is given by

$$\Psi(x) := (x_1g_1(x), x_2g_2(x), \dots, x_mg_m(x)), \quad x \in R_+^m$$

where  $x_i$  is a population density of the species  $i$  and the function  $g_i$  is a growth rate of the species  $i$  which depends on a population density vector  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Depending on the properties of the functions  $g_i$ , the discrete-time Kolmogorov system represents different kinds of species interactions.

A mapping  $\Psi: R_+^m \rightarrow R_+^m$  is called stochastic if  $V(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$ . In what follows, a stochastic Kolmogorov system  $\Psi: R_+^m \rightarrow R_+^m$  is called a *Lotka-Volterra operator* (in short, an LV-operator). If  $\Psi$  is an LV-operator, then every face of the simplex is invariant under  $\Psi$ , i.e.,  $\Psi(\Gamma_\alpha) \subset \Gamma_\alpha$ , for all  $\alpha \subset \Gamma$ .

A continuous function  $\varphi: S^{m-1} \rightarrow R$  is called a Lyapunov function for an operator  $V$  if the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(V^n(x))$  exists and finite for all  $x \in S^{m-1}$ .

Let  $f(x): S^2 \rightarrow [0,1]$  be a continuous function and let  $\tau > 0$  be a real number. Consider on  $S^2$  the following operator

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1 \left( 1 + \left( \frac{x_1^r x_2}{s - x_1 + \|x\|} - \frac{x_3^{r+1}}{s - x_3 + \|x\|} \right) f(x) \right), \\ x_2' = x_2 \left( 1 + \left( \frac{x_2^r x_3}{s - x_2 + \|x\|} - \frac{x_1^{r+1}}{s - x_1 + \|x\|} \right) f(x) \right), \\ x_3' = x_3 \left( 1 + \left( \frac{x_3^r x_1}{s - x_3 + \|x\|} - \frac{x_2^{r+1}}{s - x_2 + \|x\|} \right) f(x) \right), \end{cases} \quad (4)$$

where  $\|\cdot\|$  a norm in  $R^3$  and  $s \geq 3$  is a natural number.

Let  $e_1 = (1,0,0)$ ,  $e_2 = (0,1,0)$ ,  $e_3 = (0,0,1)$  be the vertexes of the simplex  $S^2$ . It is easy to verify that the faces  $\Gamma_{\{1,2\}}, \Gamma_{\{1,3\}}, \Gamma_{\{2,3\}}$  are invariant sets with respect to  $V$ . The vertexes  $e_1, e_2, e_3$  and the point  $c = (1/3, 1/3, 1/3)$  are the fixed points of the operator (4).

**Theorem.** For the operator  $V$  defined by (4) the following assertions true:

i) The function  $\varphi(x) = x_1 x_2 x_3$  is a Lyapunov function for LV-operator (4);

ii)  $\omega_V(x^{(0)})$  is an infinite subset of  $\partial S^2$  for any  $x^{(0)} \in S^{m-1} \setminus \{c\}$ ;

iii) For any  $x^{(0)} \in S^{m-1} \setminus \{c\}$  and the LV-operator  $V$  the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} V^k(x)$  does not

exists, that is the operator  $V$  is a non-ergodic transformation.

## References

1. *N. N. Ganikhodzhaev, D. V. Zanin.* On a necessary condition for the ergodicity of quadratic operators defined on a two-dimensional simplex, *Russ. Math. Surv.* 59 (3) (2004) 571–572.
2. *R. N. Ganikhodzhaev.* Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. *Sb. Math.* 76 (2) (1993), 489–506.
3. *S. M. Ulam.* A collection of mathematical problems, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience Publishers, New York-London, 1960.
4. *M. I. Zakharevich.* On the behaviour of trajectories and the ergodic hypothesis for quadratic mappings of a simplex, *Russ. Math. Surv.* 33 (6) (1978) 265–266.

# ON DYNAMICS OF A NON-VOLTERRA QUADRATIC STOCHASTIC OPERATOR

U. U. Jamilov, S. M. Rajabov

*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics;*

*e-mail: [jamilovu@yandex.ru](mailto:jamilovu@yandex.ru), e-mail: [rajabovs90@mail.ru](mailto:rajabovs90@mail.ru)*

Let  $E = \{1, \dots, m\}$  be a finite set and the set of all probability distributions on  $E$

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

be the  $(m-1)$ - dimensional simplex. A map  $V$  of  $S^{m-1}$  into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j \quad (1)$$

for any  $x \in S^{m-1}$  and for all  $k = 1, \dots, m$  where

$$p_{ij,k} \geq 0, p_{ij,k} = p_{ji,k}, \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1. \quad (2)$$

In [1] developed the theory of Volterra QSOs. A Volterra QSO is defined by (1), (2) and with the additional assumption

$$p_{ij,k} = 0, \text{ for any } k \notin \{i, j\}, i, j, k = 1, \dots, m.$$

The trajectory  $\{x^{(n)}\}_{n \geq 0}$  of an operator  $V$  for a point  $x \in S^{m-1}$  is defined by  $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$  for all  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

Denote by  $\omega_V(x^{(0)})$  the set of limit points of the trajectory  $\{x^{(n)}\}_{n \geq 0}$ .

**Definition 1.** A point  $x \in S^{m-1}$  is called a *periodic point* of  $V$  if there exists an  $n$  so that  $V^n(x) = x$ . The smallest positive integer  $n$  satisfying the above is called the prime period or least period of the point  $x$ . A period-one point is called a *fixed point* of  $V$ . Denote the set of all fixed points by  $Fix(V)$  and the set of all periodic points of (not necessarily prime) period  $n$  by  $Per_n(V)$ .

Let  $D(V(x^*)) = (\partial V_i / \partial x_j)(x^*)$  be a Jacobian of  $V$  at the point  $x^*$ .

**Definition 2.** A *fixed* point  $x^*$  is called hyperbolic if its Jacobian  $D(V(x^*))$  has no eigenvalues on the unit circle. A hyperbolic fixed point  $x^*$  is called:

1) *attracting*, if all the eigenvalues of the Jacobian  $D(V(x^*))$  are less than 1 in absolute value;

2) *repelling*, if all the eigenvalues of the Jacobian  $D(V(x^*))$  are greater than 1 in absolute value;

3) a *saddle*, otherwise.

Let us consider a non-Volterra QSO defined on the two-dimensional simplex which has the form

$$V : \begin{cases} x_1' = (1 - \theta)x_1^2 + \theta x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 \\ x_2' = (1 - \theta)x_2^2 + \theta x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 \\ x_3' = \theta x_1^2 + (1 - \theta)x_3^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \end{cases}$$

where  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Note that the operator (3) is a non-Volterra QSO.

Let  $c = (1/3, 1/3, 1/3)$  be the center of the simplex  $S^2$ .

**Theorem 1.** For the non-Volterra QSO (3) the following statements are true:

(i) If  $\theta = 0$  then the operator  $V$  is identity map;

(ii) If  $0 < \theta < 1$  then  $Fix(V) = \{c\}$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} V^n(x) = c, \forall x \in S^2 \setminus \{c\}$ ;

(iii) If  $\theta = 1$  then  $Fix(V) = \{c\}$  and  $Per_3(V) = \{e_1, e_2, e_3\}$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} V^n(x) = c$ .

### References

1. R.N. Ganikhodzhaev, Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. *Sb. Math.* **76** (2) (1993), pp. 489 – 506.
2. U.U. Jamilov, On a family of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators. *Jour. Phys. Conf. Ser.* 697 (2016), 012013.

3. Zhamilov U.U., Rozikov U.A. On the dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on a two-dimensional simplex. Sb. Mat. 200 (9) (2009), pp. 1339 - 1351.

## ON DYNAMICS OF $P$ -ADIC POTTS-BETHE FUNCTION

*Khakimov Otabek Norbuta ugli*

*V.I.Romanovski Insitute of Mathematics*

*o.khakimov@mathinst.uz*

Models of interacting systems have been intensively studied in the last years and new methodologies have been developed in the attempt to understanding their intriguing features. One of the most promising directions is the combination of statistical mechanics tools and methods adopted in dynamical systems. One of such tools is the renormalization group (RG) which has had a profound impact on modern statistical physics. In this work, we are interested in the following question: how is the existence of the phase transition related to chaotic behavior of the associated  $p$ -adic dynamical systems (this is one of the important question in physics [1])? It is known that for this model there exists a phase transition if  $q$  is divisible by  $p$ . We will show that, in the phase transition regime, the associated  $p$ -adic dynamical system is chaotic, i.e. it is conjugate to the full shift.

We consider the  $p$ -adic Potts-Bethe function which for any periodic point of that defines exactly one Gibbs measure on a Cayley tree of order  $k$ :

$$f_{\theta}(x) = \left( \frac{\theta x + q - 1}{x + \theta + q - 2} \right)^k,$$

where  $|\theta - 1|_p < 1$  and  $q \geq 3$  natural number. We recall that some basic properties of  $p$ -adic Potts-Bethe function were considered in [2]. It is easy to check that if  $k = 2$  then  $f_{\theta}$  has three fixed points:  $x_0 = 1$  and

$$x_{1,2} = \frac{-2(q-1) - (\theta-1)^2 \pm (\theta-1)\sqrt{-4(q-1) + (\theta-1)^2}}{2}.$$

**Theorem 1.** For the fixed points  $x_0, x_1, x_2$  of  $f_\theta$  the following statements hold:

- i)  $x_0$  is an attracting fixed point;
- ii)  $x_1$  and  $x_2$  are repelling fixed points.

Now, we are going to describe basin of attraction  $A(x_0)$  of the fixed point  $x_0 = 1$ .

Let us denote

$$K_1 = \{x \in Q_p: |x - x_0|_p < |q|_p\}.$$

**Theorem 2.** Let  $k = 2$  and  $p \geq 3$ . If  $0 < |\theta - 1|_p < |q|_p$  then

$$A(x_0) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(K_1).$$

**Theorem 3.** Let  $|\theta - 1|_p \leq p^{-2n-1}$ ,  $r = |p^n(\theta - 1)|_p$  for some  $n \geq 0$ . If  $X = B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$  then the dynamics  $(J_{f_\theta}, f_\theta, |\cdot|_p)$  is isometrically conjugate to the full shift dynamics of two symbols.

Here  $J_{f_\theta} = \bigcap_{n \geq 0} f_\theta^{-n}(X)$ .

### References

1. Gyorgyi G., Kondor I., Sasvari L., Tel T., *Phase transitions to chaos*. Singapore: World Scientific; 1992.
2. Mukhamedov F., Khakimov O., *Chaotic behavior of the p-adic Potts-Bethe mapping II*, // Ergodic theory and Dynamical Systems, 2022, 42(11), pp 3433-3457.

## SOME PROPERTIES OF INFINITE DIMENSIONAL QUADRATIC STOCHASTIC OPERATORS

*Khakimov Otabek Norbuta ugli*

*V.I. Romanovski Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

*o.khakimov@mathinst.uz*

It was known that orthogonality preserving property and surjectivity of nonlinear Markov operators, acting on finite dimensional simplexes, are equivalent. It turns out that these notions are no longer equivalent when such kind of operators are considered over on infinite dimensional spaces. In this work, we find necessary and sufficient

condition to be equivalent of these notions, for the second order nonlinear Markov operators.

Let  $E$  be a subset of  $\mathbb{N}$ . Denote

$$S^E = \{x = (x_i)_{i \in E} \in \mathbb{R}^E : x_i \geq 0, \sum_{i \in E} x_i = 1\}.$$

In what follows, by  $e^i$  we denote the standard basis in  $S^E$ , i.e.  $e^i = (\delta_{ik})_{k \in E}$ , where  $\delta_{ik}$  is the Kroneker delta. Let  $V$  be a mapping defined by

$$V(x)_k = \sum_{i,j \in E} P_{ij,k} x_i x_j, \quad k \in E, \quad (1)$$

here,  $P_{ij,k}$  are hereditary coefficients which satisfy

$$P_{ij,k} \geq 0, P_{ij,k} = P_{ji,k}, \sum_{k \in E} P_{ij,k} = 1, \quad \forall i, j, k \in E. \quad (2)$$

One can see that  $V$  maps  $S^E$  into itself and  $V$  is called Quadratic Stochastic Operator (in short QSO) [2].

By *support* of  $x = (x_i)_{i \in E} \in S^E$  we mean a set  $\text{supp}(x) = \{i \in E : x_i \neq 0\}$ . Recall that two vectors  $x, y \in S^E$  are called *orthogonal* and denoted by  $x \perp y$  if  $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$ . If  $x, y \in S^E$ , then one can see that  $x \perp y$  if and only if  $x \circ y = 0$ . Here,  $x \circ y = \sum_{i \in E} x_i y_i$ .

**Definition 1.** A QSO  $V$  given by (1),(2) is called *orthogonality preserving* QSO (in short OP QSO) if for any  $x, y \in S^E$  with  $x \perp y$  one has  $V(x) \perp V(y)$ .

Recall [3] that a QSO  $V$  is called *Volterra* if one has  $P_{ij,k} = 0$ , if  $k \notin \{i, j\}$  for any  $i, j, k \in E$ .

**Remark 1.** In [3] it was given an alternative definition Volterra operator in terms of extremal elements of  $S^E$ .

One can check [4] that a QSO  $V$  is Volterra if and only if one has

$$V(x)_k = x_k (1 + \sum_{i \in E} a_{ki} x_i), \quad \forall k \in E,$$

where  $a_{ki} = 2P_{ik,k} - 1$ ,  $a_{kk} = 0$  for all  $i, k \in E$ . One can see that  $a_{ki} = -a_{ik}$ .

This representation leads us to the following definitions.

**Definition 2.** A QSO  $V$  is called  $\pi$ -Volterra if there is a permutation  $\pi$  of  $E$  such that  $V$  has the following form

$$V(x)_k = x_{\pi(k)} \left( 1 + \sum_{i \in E} a_{\pi(k)i} x_i \right), \quad \forall k \in E,$$

where  $a_{\pi(k)i} = 2P_{i\pi(k),\pi(k)} - 1$ ,  $a_{\pi(k)\pi(k)} = 0$  for any  $i, k \in E$ .

In [1],[5] it has been proved the following result.

**Theorem 1.** Let  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  and  $V$  be a QSO on  $S^E$ . Then the following statements are equivalent:

- (i)  $V$  is orthogonality preserving;
- (ii)  $V$  is surjective;
- (iii)  $V$  is  $\pi$ -Volterra QSO.

We emphasize that there is a big difference between finite and infinite dimensional settings. In the infinite dimensional setting, some implication of Theorem 1 fails. To show the differences let us consider the following example.

**Example.** Let us consider the following operator:

$$V(x)_k = \begin{cases} 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), & \text{if } k = 1, \\ x_{i(k)}x_{j(k)}, & \text{if } k \geq 2. \end{cases}$$

here  $k \mapsto (i(k), j(k))$  is a bijection from  $\{2, 3, \dots\}$  to  $\mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ . It is clear that this is a quadratic stochastic operator which preserves disjointness but fails to be  $\pi$ -Volterra.

**Theorem 2.** Let  $V$  be infinite dimensional QSO such that  $V(e^i) = e^{\pi(i)}$  for some permutation  $\pi$  of  $\mathbb{N}$ . Then the following statements are equivalent:

- i)  $V$  is orthogonality preserving;
- ii)  $V$  is surjective;
- iii)  $V$  is  $\pi$ -Volterra QSO.

**Remark 2.** We notice that if a QSO  $V$  acts on a finite dimensional simplex, then the surjectivity is equivalent the orthogonality preserving property of  $V$ . The last theorem shows that to get a similar kind of statement on infinite dimensional simplex  $S^E$ , we needed to impose an extra condition  $V(e^i) = e^{\pi(i)}$  which is automatically satisfied in the finite dimensional setting.

### References

1. Akin H., Mukhamedov F. *Orthogonality preserving infinite dimensional quadratic stochastic operators*, AIP Conf. Proc. 1676(2015), 020008.
2. Mukhamedov F. M. *On infinite dimensional Volterra operators*, Russian Math. Surveys, 5(2000),1161-1162
3. Mukhamedov F., Akin H., Temir S. *On infinite dimensional quadratic Volterra operators*, J.Math. Anal. Appl. 310(2005), 533-556.
4. Mukhamedov F., Ganikhodjaev N. *Quantum Quadratic Operators and Processes*, Berlin, Springer, 2015.
5. Saburov M., *On the surjectivity of quadratic stochastic operators acting on the simplex*, Math. Notes, 99(2016) 623-627

## NEW PROOF FOR FOR THE BEST CONSTANT OF SOME HARDY-TYPE INEQUALITY

*G.Kulieva<sup>1</sup>, M.Eshimova<sup>2</sup> and T.Turaqulov<sup>3</sup>*

*E-mails: <sup>1</sup>kulievag@mail.ru, <sup>2</sup>eshimova\_math@mail.ru,*

*<sup>3</sup>turakulov1992@inbox.ru*

*<sup>1,3</sup>Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan*

*<sup>2</sup>Institute of mathematics named after V.I.Romanovsky AS RUz, Tashkent, Uzbekistan*

In 1925 G.H.Hardy [1] derived the following inequality

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p dx, \quad (1)$$

which is called the classical Hardy inequality in  $L_p$ , with the exact value  $C = \frac{p}{p-1}$ .

Later, it was proved "weighted" modification of (1) in weighted Lebesgue space  $L_p$ , namely the inequality

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p x^{\alpha} dx \leq \left( \frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p x^{\alpha} dx \quad (2)$$

with  $p > 1$  and  $\alpha < p - 1$  – for all measurable non-negative functions  $f$  (see [1] Theorem 2), here the constant  $C = \frac{p}{p-\alpha-1}$  is the best possible.

Together with the Hardy inequality (2), we can immediately define the conjugate Hardy inequality:

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{x} \int_x^{\infty} f(t) dt \right)^p x^{\alpha} dx \leq \left( \frac{p}{\alpha+1-p} \right)^p \int_0^{\infty} f^p(x) x^{\alpha} dx, \quad (3)$$

which holds for all measurable non-negative functions  $f$  with  $p > 1$  and  $\alpha > p - 1$  and  $C = \frac{p}{\alpha+1-p}$  is the best possible (see again [HLP], Theorem 330).

Such problems have also been studied for Hardy-type inequalities:

$$\int_0^{\infty} \left( \int_0^x (x-t)^n f(t) dt \right)^p x^{\alpha} dx \leq C \int_0^{\infty} f(x)^p x^{\alpha} dx, \quad (4)$$

here  $n > -1$  va  $C$  is a some constant. The problem of finding exact values of  $C$  can be found in e.g. [1-2].

In this work we are involved in obtaining the explicit value of the constant for Hardy-type inequality (3) with  $\beta \in Z^+$ .

Our main result of the work is

**Theorem.** *Let  $p = 2$  then the Hardy type inequality*

$$\int_0^{\infty} \left( \int_0^x (x-t)^n f(t) dt \right)^2 x^{\alpha-2n-2} dx \leq B \left( \frac{1-\varepsilon}{2}, n+1 \right) \int_0^{\infty} f^2(x) x^{\alpha} dx \quad (5)$$

holds for all non-negative measurable functions  $f$ , where  $B$  is the Beta function.

**Remark.** In particular, when  $n = 0$ , we have the inequality (2) with the known constant

$$C_0 = B\left(\frac{1-\varepsilon}{2}, 1\right) = \frac{2}{1-\varepsilon}, \quad \text{with } \varepsilon < 1.$$

### References

1. A.Kufner, L.Maligranda, L.-E. Persson, The Hardy inequality-about its history and some related results. Pilsen, 2007 y.
2. A.Kufner, L.-E.Persson, Weighted inequalities of Hardy type. World scientific: New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2003y.
3. K.Andersen, H.Heinig, Weighted norm inequalities for certain integral operators, SIAM J. Math. Anal. 14 (1983), 834-844.
4. S.Bloom, R.Kerman, Weighted norm inequalities for operators of Hardy type, Proc. Amer. Moth. Soc.113 (1991) (1), 135-141.
5. A. Kufner, K. Kuliev, G. Kulieva, M. Eshimova. New equivalent conditions for Hardy-type Inequalities. Mathematica Bohemica, Published online on March 3, 2023 as doi: [10.21136/MB.2023.0088-22](https://doi.org/10.21136/MB.2023.0088-22)
6. K. Kuliev, G. Kulieva, M. Eshimova. On estimates for norm of some integral operators in weighted Lebesgue spaces, Mathematical Inequalities & Applications Volume 26, Number 1 (2023), 27–37. doi:10.7153/mia-2023-26-03
7. K.D. Kuliev. On estimates for norms of some integral operators with Oinarov's kernel, Eurasian Mathematical Journal 13(3), 67-81.

## DISKRET NOCHIZIQLI SHREDINGER TENGLAMASINING SONLI YECHIMI TO‘G‘RISIDA

*Sh.I.Otaboyev*

*Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston*

*e-mail: 152amaliy@gmail.com*

M. Ablowitz va J. Ladik [1], [2], [3] ishlarida

$$i\dot{q}_n = (1 + |q_n|^2)(q_{n+1} + q_{n-1}) - 2q_n \quad (1)$$

diskret nochiziqli Shredinger tenglamasi Ablovits-Ladik tenglamalar sistemasi uchun sohilish nazariyasining teskari masalasida yechish mumkinligi ko'rsatilgan. Gerdjikov va Ivanov [4], [5] ishlarida  $n \rightarrow \pm \infty$  da nolga intiluvchi  $q_n$  matritsa funksiya hoida o'rganilgan. Umumiy tenglamalar sistemasi uchun nazariya Ablovits, Prinari va Trubchat [6] va Tsuchida, Ujino va Wadati [7] tomonidan ishlab chiqilgan. Aynan [7] ishda (3.12) tenglamaning N-soliton va brizer yechimlari  $N \times N$  chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi ko'rinisha olingan. Matritsaviy diskret nochiziqli Shredinger tenglamasining tez kamayuvchi funksiyalar sinfidagi yechimi Demontis va Van der Mee [8], [9], [10], [11] ishlarida o'rganilgan.

Sohilish nazariyasining teskari masalasi usuli quyidagi 3 ta qadamlardan: 1) Boshlang'ich shartlar yordamida, sohilish nazariyasining berilganlarini aniqlash maqsadida, Zaxarov-Shabata tenglamalar sistemasi uchun sohilish nazariyasining to'g'ri masalasini yechish; 2) Sohilish nazariyasi berilganlari evolyusiyalarini topish; 3) Tenglama yechimini olish uchun mos teskari masalani yechish.

Sohilish nazariyasining teskari masalasi usuli Gelfand-Levitan-Marchenko integral tenglamalari sistemasi deb nomlanuvchi ikkita integral tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Akslanuvchi potentsiallar xoida bu sistemaning yechimini topish murakkab bo'ladi. Biror bir taqribiy yechimni topish uchun sonli usullar qo'llaniladi.

Bu ishda biz diskret nochiziqli Shredinger tenglamasining yechimini sohilish nazariyasining teskari masalasi orqali sonli usulda topish usulini ko'rsatamiz.

Ushbu

$$\begin{aligned} \varphi_{1,n+1} &= z \varphi_{1,n} + q_n \varphi_{2,n}, \\ \varphi_{2,n+1} &= z^{-1} \varphi_{1,n} - \bar{q}_n \varphi_{2,n} \end{aligned} \quad (2)$$

tenglamalar sistemasini  $q_n(t)$  potentsiali

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+|n|)|q_n(t)| < \infty \quad (3)$$

shartni qanoatlantirsin.

(2) tenglamalar sistemasining potentsiali (3) shartni qanoatlantirganda ushbu

$$\begin{aligned} \phi_n &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} z^{-n}, & \psi_n &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z^n, \\ \bar{\phi}_n &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z^n, & \bar{\psi}_n &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z^{-n} \end{aligned} \quad n \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (4)$$

asimptotikalarni qanoatlantiruvchi yechimlariga Yost yechimlari deyiladi. Bu yechimlar mavjud va yagona bo‘ladi.

$|z|=1$  da  $\{\phi_n(z), \bar{\phi}_n(z)\}$  va  $\{\psi_n(z), \bar{\psi}_n(z)\}$  vektor funksiya jufti (2) tenglamalar sistemasining chiziqli erkli yechimlar jufti bo‘ladi. Shunga ko‘ra ushbu

$$\phi_n = a\bar{\psi}_n + b\psi_n, \quad \bar{\phi}_n = -a\psi_n + \bar{b}\bar{\psi}_n \quad (5)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda  $a(z) = W\{\psi_n, \phi_n\}$ ,  $b(z) = W\{\phi_n, \bar{\psi}_n\}$ .

$a(z)$  funksiya  $|z| < 1$  sohada cheklita nollarga ega bo‘ladi.  $a(z)$  funksiyaning aniqlanishiga ko‘ra  $a(z_k) = 0$  bo‘lsa  $\phi_n(z)$  va  $\psi_n(z)$  yechimlar chiziqli bog‘liq bo‘lishi kelib chiqadi, ya’ni

$$\phi_n(z_k) = \psi_n(z_k)d_k \quad (6)$$

$z = z_k$  sonlar (2) tenglamalar sistemasining xos qiymatlari bo‘ladi.

Quyidagi

$$\{R(z), z_k, d_k, k = 1, 2, \dots, N\} \quad (7)$$

naborga (2) tenglamalar sistemasining sochilish nazariyasi berilganlari deyiladi.

$\psi_n(z)$  funksiya uchun quyidagi [2]

$$\psi_n(z) = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z^{n'}$$

tasvir o‘rinli. Bu tasvirdagi  $K(n, m) = \begin{pmatrix} K_1(n, m) \\ K_2(n, m) \end{pmatrix}$  yadro  $q_n(t)$  funksiya  $q_n(t) = -\frac{K_1(n, n+1)}{K_2(n, n)}$

munosabat yordamida bog‘langan. Ushbu  $K(n, m) = \prod_{i=n}^{\infty} \left( \frac{1}{1+|q_i|^2} \right) \kappa(n, m)$  belgilashni

kiritamiz.  $\kappa(n, m)$  yadro  $n > m$  da

$$\bar{\kappa}(n, m) + \sum_{n'=n}^{\infty} \kappa(n, n') F(m+n') = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(m+n) \quad (8)$$

tenglamani qanoatlantiradi, bunda

$$F(n) = \oint_{|z|=1} R z^{n-1} dz - \sum_{k=1}^N c_k z_k^{n-1}. \quad (9)$$

**Teorema.** Agar  $q_n(t)$  funksiya (1) tenglamaning (3) sinfga tegishli yechimi bo‘lsa, u holda  $q_n(t)$  potensialga mos keluvchi sohilish nazariyasining berilganlari  $t$  bo‘yicha quyidagicha o‘zgaradi:

$$r_t = (z^2 - z^{-2})r,$$

$$\dot{d}_k = (z_k^2 - z_k^{-2})d_k, \quad \dot{z}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$\{R(z), z_k, c_k, k = 1, \dots, N\}$  sohilish nazariyasining berilganlari bo‘lsin. (9) funksiyani qurib olamiz. (8) tenglamani ushbu

$$\begin{cases} \kappa_2^*(k, k+p) + \sum_{j=1}^N \kappa_1(k, k+j) F(k+j+p) = 0, \\ \sum_{j=1}^N \kappa_2^*(k, k+j) F^*(k+j+p) - \kappa_1(k, k+p) = -F(k+p), \end{cases} \quad (10)$$

algebraik tenglamalar sistemasi orqali ifodalaymiz. (10) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini  $D = \text{diag}\{d_j\}_{j=1}^N$ ,  $I_{N_y} = \text{diag}\{1\}_{j=1}^N$ ,

$$H = \{F(k+j+p)\}_{p,j=1}^N, \quad f_N = \{F(k+p)\}_{p=1}^N, \quad (11)$$

matritsalar yordamida

$$\begin{bmatrix} I_N & HD \\ H^*D & -I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_N \end{bmatrix}, \quad (12)$$

ko‘rinishda ifodalaymiz. Bunda

$$k_2 = \{\kappa_2(k, k + p)\}_{p=1}^N, \quad k_1 = \{\kappa_1(k, k + p)\}_{p=1}^N. \quad (13)$$

vektor-ustunlar. (12) tenglamalar sistemasini

$$\begin{cases} (DH^*DHD + D)k_1 = Df_N, \\ k_2 = -HDk_1. \end{cases}$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Bundagi  $(DH^*DHD + D)$  matritsa simmetrik va musbat aniqlangan matritsa bo‘lib, gradiyentlar usulida yechish mumkin.  $2N$  o‘lchamli  $(H)_{ij} = F(k + i + j)$  matritsaga Gankel matritsasi deyiladi.

### Adabiyotlar

1. M. Ablowitz and J. Ladik, "Nonlinear differential-difference equations and nonlinearity," *J. Math. Phys.*, no. 17, pp. 1011-1018, 1976.
2. M. Ablowitz and J. Ladik, "Nonlinear differential-difference equations," *J. Math. Phys.*, no. 16, pp. 598-603, 1975.
3. M. Ablowitz and J. Ladik, "A nonlinear difference scheme and inverse scattering," *Stud. Appl. Math.*, no. 55, p. 213–229, 1976.
4. V. Gerdjikov and M. Ivanov, "Block discrete Zakharov-Shabat systems. I. Generalized Fourier expansion," in *United Nuclear Research Institute Report E2-81-811*, Dubna, 1981.
5. V. Gerdjikov and M. Ivanov, "Block discrete Zakharov-Shabat systems. II. Hamiltonian structures," in *United Nuclear Research Institute Report E2-81-812*, Dubna, 1981.
6. M. Ablowitz, M. Prinari и A. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrodinger Systems*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
7. T. Tsuchida, H. Ujino и M. Wadati, «Integrable semi-discretization of the coupled nonlinear Schrodinger equations,» *J. Phys. A*, № 32, p. 2239–2262, 1999.

8. F. Demontis, Direct and Inverse Scattering of the Matrix Zakharov-Shabat System, Italy, : University of Cagliari, 2007.
9. F. Demontis и C. van der Mee, «An alternative approach to integrable discrete nonlinear Schrodinger equations,» *Acta Appl. Math*, № 131, p. 29–47, 2014.
10. F. Demontis and C. van der Mee, "Closed form solutions to the integrable discrete nonlinear Schrodinger equation," *J. Nonlin. Math. Phys*, vol. 2, no. 19, p. 22, 2012.
11. F. Demontis and C. van der Mee, "Exact solutions to the integrable discrete nonlinear Schrodinger equation under a quasiscalarity condition," *Commun. Appl. Ind. Math.*, vol. 2, no. 2, p. 21, 2011.

**$G_2^{(2)}$ -PERIODIC GROUND STATES FOR THE ISING MODEL WITH THE  
COMPETING INTERACTIONS AND A PERIODIC EXTERNAL FIELD**

<sup>1</sup>Rahmatullayev M. M., <sup>2</sup>Rasulova M. A., <sup>3</sup>Asqarov J. N.

<sup>1,2</sup>*Institute of mathematics after named V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan*

<sup>1,2,3</sup>*Namangan State University, Namangan, Uzbekistan*

*e-mail: [mrachmatullaev@rambler.ru](mailto:mrachmatullaev@rambler.ru), [m\\_rasulova\\_a@rambler.ru](mailto:m_rasulova_a@rambler.ru),*

*[askarovjavokhir0430@gmail.com](mailto:askarovjavokhir0430@gmail.com)*

Let  $\tau^k = (V, L)$  be a Cayley tree of order  $k$ , i.e. an infinite tree such that exactly  $k+1$  edges are incident to each vertex. Here  $V$  is the set vertices and  $L$  is the set of edges of  $\tau^k$ . Let  $G_k$  denote the free product of  $k+1$  cyclic groups  $\{e, a_i\}$  of order 2 with generators  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ . There exists a one-to-one correspondence between the set  $V$  of vertices of the Cayley tree of order  $k$  and the group  $G_k$  (see [1], [2]).

Assume that spin takes its values in the set  $\Phi = \{-1, +1\}$ . By a configuration  $\sigma$  on  $V$  we mean a function taking  $\sigma : x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$ . The set of all configurations coincides with the set  $\Omega = \Phi^V$ .

Consider the quotient group  $G_k/G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ , where  $G_k^*$  is a normal subgroup of index  $r$  with  $r \geq 1$ .

**Definition 1.** A configuration  $\sigma$  is said to be  $G_k^*$ -periodic, if  $\sigma(x) = \sigma_i$  for all  $x \in G_k$  with  $x \in H_i$ . A  $G_k$ -periodic configuration is said to be translation-invariant.

Let  $M$  be the set of all unit balls with vertices in  $V$ . By the restricted configuration  $\sigma_b$  we mean the restriction of a configuration  $\sigma$  to a ball  $b \in M$ . Let  $c_b$  denote the center of a unit ball  $b$ .

The Ising model with the competing interactions and  $G_k^{(2)}$ -periodic external field is defined according to the following Hamiltonian:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V: \\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \sum_{x \in V} \alpha_x \sigma(x), \quad (1)$$

where  $J_1, J_2, \alpha_x \in R$  and

$$\alpha_x = \begin{cases} \alpha_0, & \text{if } x \in G_k^{(2)}, \\ \alpha_1, & \text{if } x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

where  $\alpha_0 \neq \alpha_1$  and  $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| \text{ is even}\}$ .

The energy of a configuration  $\sigma_b$  on  $b$  is defined by the formula:

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{x \in S_1(c_b)} \sigma(x)\sigma(c_b) + J_2 \sum_{\substack{x,y \in b: \\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha_{c_b} \sigma(c_b).$$

**Lemma 1.** We have

$$U(\sigma_b) \in \{U_{+,0}^{(0)}, U_{-,0}^{(0)}, U_{+,0}^{(1)}, U_{-,0}^{(1)}, \dots, U_{+,k+1}^{(0)}, U_{-,k+1}^{(0)}, U_{+,k+1}^{(1)}, U_{-,k+1}^{(1)}\}$$

for all  $\sigma_b$ , where

$$U_{\pm,i}^{(j)} = \left( \frac{k+1}{2} - i \right) J_1 + \left( \frac{k(k+1)}{2} + 2i(i-k-1) \right) J_2 \pm \alpha_j,$$

$i = 0, 1, \dots, k+1, j = 0, 1$ .

**Definition 2.** A configuration  $\varphi$  is called a ground state of the Hamiltonian (1), if

$$U(\varphi_b) = \min \left\{ U_{+,0}^{(0)}, U_{-,0}^{(0)}, U_{+,0}^{(1)}, U_{-,0}^{(1)}, \dots, U_{+,k+1}^{(0)}, U_{-,k+1}^{(0)}, U_{+,k+1}^{(1)}, U_{-,k+1}^{(1)} \right\}$$

for all  $b \in M$ .

For a fixed  $m = 0, 1, \dots, k+1$ ,  $j = 0, 1$ , we set

$$A_m = \left\{ (J_1, J_2, \alpha_1, \alpha_2) \in R^4 : U_m = \min \left\{ U_{+,0}^{(0)}, U_{-,0}^{(0)}, U_{+,0}^{(1)}, U_{-,0}^{(1)}, \dots, U_{+,k+1}^{(0)}, U_{-,k+1}^{(0)}, U_{+,k+1}^{(1)}, U_{-,k+1}^{(1)} \right\} \right\}$$

**Theorem.** If  $(J_1, J_2, \alpha_0, \alpha_1) \in A_{\pm,3}^{(0)} \cap A_{\mp,3}^{(1)}$ , then  $G_2^{(2)}$ -periodic configuration

$$\sigma(x) = \begin{cases} \pm 1, & \text{if } x \in G_k^{(2)}, \\ \mp 1, & \text{if } x \in G_k \setminus G_k^{(2)} \end{cases}$$

is a  $G_2^{(2)}$ -ground state for the model (1).

## References

1. U. A. Rozikov, Gibbs measures on Cayley trees. World scientific. (2013).
2. N. N. Ganikhodjaev, Group representation and automorphisms of the Cayley tree. Dokl. Akad. nauk Resp. Uzbekistan, no. 4, 3. (1994).

## RELATIVE BOUNDS AND CLOSEDNESS OF AN UNBOUNDED OPERATOR MATRICES

*T.H. Rasulov*

*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;*

*rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz*

An operator matrix is a matrix the entries of which are linear operators [1]. Every bounded linear operator can be written as an operator matrix if the space in which it acts is decomposed in two or more components. For an unbounded linear operator  $\mathcal{A}$ , its domain need not be decomposable as direct sum of subspaces and hence it is an additional assumption that  $\mathcal{A}$  has an operator matrix representation. If the entries of an operator matrix are densely defined and closable, this need not be true for the operator matrix. Moreover, if an operator matrix is closable, its closure need not have an operator matrix representation anymore.

Let  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , let  $(\mathcal{H}_i, \|\cdot\|_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , be Banach spaces, and let  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  be the Euclidean product of  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ , that is,

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n, \quad \|f\| := \sqrt{\|f_1\|_1^2 + \dots + \|f_n\|_n^2}, \quad f = (f_1, \dots, f_n)^t \in \mathcal{H}$$

In the Banach space  $\mathcal{H}$  we consider linear operators  $\mathcal{A}$  that admit an  $n \times n$  operator matrix representation,

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

in  $\mathcal{H}$ , where the entries  $A_{ij}: \mathcal{H}_j \supset D(A_{ij}) \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , are densely defined closable linear operators and for which the domain of  $\mathcal{A}$ , given by

$$D(\mathcal{A}) = \bigoplus_{j=1}^n \left( \bigcap_{i=1}^n D(A_{ij}) \right),$$

is again dense in  $\mathcal{H}$ .

For the reader's convenience, we briefly recall the notion of relative boundedness (see [2, subsection VI.1]).

Let  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$ ,  $(G, \|\cdot\|_G)$  be Banach spaces, and let

$$T: E \supset D(T) \rightarrow F, \quad S: E \supset D(S) \rightarrow G$$

be linear operators. Then,  $S$  is called  $T$ -bounded (or relatively bounded with respect to  $T$ ) if  $D(T) \subset D(S)$ , and there exist constants  $a_S, b_S \geq 0$  with

$$\|Sx\|_G \leq a_S \|x\|_E + b_S \|Tx\|_F, \quad x \in D(T); \quad (2)$$

the infimum  $\delta_S$  of all  $b_S$  so that (2) holds for some  $a_S \geq 0$  is called  $T$ -bound of  $S$  (or relative bound of  $S$  with respect to  $T$ ).

Note that, if  $T$  is closed and  $S$  is closable with  $D(T) \subset D(S)$ , then  $S$  is  $T$ -bounded (see [2, subsection IV.1.5]).

**Definition.** For a block operator matrix  $\mathcal{A}$  as in (1) we define the *diagonal part*  $\mathcal{T}$  and the *off-diagonal part*  $\mathcal{S}$  by

$$\mathcal{T} := \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{nn}), \quad \mathcal{S} := \mathcal{A} - \mathcal{T},$$

and we call  $\mathcal{A}$  *diagonally dominant of order  $\delta_S$*  if  $\mathcal{S}$  is  $\mathcal{T}$ -bounded with  $\mathcal{T}$ -bound  $\delta_S$ .

Note that for a diagonally dominant block operator matrix  $\mathcal{A}$  the domain is always given by the domains of the diagonal entries,

$$D(\mathcal{A}) = D(A_{11}) \oplus \cdots \oplus D(A_{nn}).$$

If  $\mathcal{A}$  is diagonally dominant of order  $\delta_S < 1$ , then  $\mathcal{S}$  is  $\mathcal{A}$ -bounded with  $\mathcal{A}$ -bound  $\leq \delta_S/(1 - \delta_S)$ .

If the diagonal entries  $A_{jj}$  of  $\mathcal{A}$  are closed, then  $\mathcal{A}$  is diagonally dominant if and only if  $D(A_{jj}) \subset D(A_{ij})$  for all  $i, j = 1, \dots, n, i \leq j$ .

The diagonal part  $\mathcal{T}$  of  $\mathcal{A}$  is always closable since it is the direct sum of the closable operators  $A_{11}, \dots, A_{nn}$ . For the off-diagonal part  $\mathcal{S}$  this is only true in the  $2 \times 2$  case. If  $n \geq 3$ , then  $\mathcal{S}$  need not to be closable even if  $\mathcal{A}$  is tridiagonal and all entries are closed.

We establish conditions for the closability and closedness of general  $n \times n$  operator matrices and for the more particular tridiagonal case. The first result is a simple perturbation result.

**Theorem 1.** If the operator matrix  $\mathcal{A}$  in (1) is diagonally dominant of order  $\delta_S < 1$ , then  $\mathcal{A}$  is closable; if, in addition, the diagonal entries of  $\mathcal{A}$  are closed, then  $\mathcal{A}$  is closed.

In the following, we derive another criterion for the closability and closedness, respectively, of tridiagonal operator matrices which are characterized by  $A_{ij} = 0$  for  $|i - j| > 1$ , i.e.,

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & & & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & A_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n,n-1} & A_{nn} \end{pmatrix}; \quad (3)$$

here, the relative bounds  $\delta_{j+1,j}$  and  $\delta_{j,j+1}$  of  $A_{j+1,j}$  and  $A_{j,j+1}$  on the lower and upper off-diagonal, respectively, may balance each other.

**Theorem 2.** Let  $\mathcal{A}$  be defined as (3) and diagonally dominant such that, for every  $k = 2, 3, \dots, n$ , either  $A_{k,k-1}$  has  $A_{k-1,k-1}$  bound 0 or  $A_{k-1,k}$  has  $A_{kk}$  bound 0, i.e.,

$$\delta_{k,k-1} = 0 \quad \text{or} \quad \delta_{k-1,k} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Then  $\mathcal{A}$  is closable and closed if its diagonal elements are closed.

Sufficient conditions for relative bound 0 include boundedness, relative compactness, and domain inclusions for some fractional power (see e.g., [1, Corollary 2.1.20], [3, Corollary III.7.7]). Therefore, the next corollary is immediate from Theorem 2.

**Corollary.** Let  $\mathcal{A}$  be tridiagonal and diagonally dominant such that, for every  $k = 2, 3, \dots, n$ , either one of

(i)  $A_{k,k-1}$  is bounded;

(ii)  $A_{k,k-1}$  is  $A_{k-1,k-1}$ -compact and  $\mathcal{H}_{k-1}, \mathcal{H}_k$  are reflexive;

(iii)  $\mathcal{H}_{k-1}, \mathcal{H}_k$  are Hilbert spaces and  $D(|A_{k-1,k-1}|^\gamma) \subset D(A_{k,k-1})$  for some  $\gamma \in (0,1)$ ;

or one of

(i')  $A_{k-1,k}$  is bounded;

(ii')  $A_{k-1,k}$  is  $A_{k,k}$ -compact and  $H_{k-1}, H_k$  are reflexive;

(iii')  $\mathcal{H}_{k-1}, \mathcal{H}_k$  are Hilbert spaces and  $D(|A_{k,k}|^\gamma) \subset D(A_{k-1,k})$  for some  $\gamma \in (0,1)$  holds. Then,  $\mathcal{A}$  is closable and closed if its diagonal elements are closed.

An example for the subtle difference between closed and closable operator matrices was given in [4, Section 6] where accretive operator matrices were considered. Operator matrices of this form also occur in stability problems in hydrodynamics; there information about the closure is needed so that results for contractive semigroups can be applied (see [5, Remark 3.12, Theorem 3.15]).

## References

1. C.Tretter. Spectral theory of block operator matrices and applications. Imperial College Press, 2008.
2. T.Kato. Perturbation theory for linear operators. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 1995.
3. D.E.Edmunds, W.D.Evans. Spectral theory and differential operators. Oxford Math. Mono., The Clarendon Press, New York, 1987.
4. T.Y.Azizov, A.Djikma, K.-H.Förster, M.Y.Glaskova. On the closedness of operator pencils. Indiana Univ. Math. J. 49:1 (2000), pp. 31–59.
5. T.Y.Azizov, V.Hardt, N.D.Kopachevsky, R.Mennicken. On the problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container. Math. Nachr., 248/249 (2003), pp. 3–39.

## **CHEGARALANMAGAN SOHALARDA KARLEMAN INTEGRAL FORMULASI**

<sup>1</sup>*Ruzmetov K.Sh.*, <sup>2</sup>*Matyoqubov Z.Q.*, <sup>3</sup>*Abdullayev J.Sh.*

<sup>1</sup>*Toshkent davlat agrar universiteti, Toshkent, O‘zbekiston*

<sup>2</sup>*Xorazm Ma‘mun akademiyasi, Urganch, O‘zbekiston*

<sup>3</sup>*Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston*

[ruzmetov1967@mail.ru](mailto:ruzmetov1967@mail.ru), [zokirbek.1986@mail.ru](mailto:zokirbek.1986@mail.ru), [jonibek-abdullayev@mail.ru](mailto:jonibek-abdullayev@mail.ru)

Ma'lumki Karleman tipidagi integral formulalar golomorf funksiyalarning soha ichidagi qiymati bilan soha chegarasining qismidagi qiymatlari orasidagi bog'liqligini va golomorf davom ettirish masalalarini o'rganishda asos bo'lib xizmat qiladi. Ushbu yo'nalishdagi birinchi natija 1926 da T. Karleman tomonidan olingan (qarang [1]), shuning uchun ushbu turdagi barcha formulalar odatda Karleman formulalari deb ataladi. Ko'p o'zgaruvchili kompleks analizda bu nazariyaning keyingi rivojlanishini L.A. Ayzenberg (qarang [2]) minografiyasida ko'rish mumkin. Bunda Karleman formulasi qavariq (yoki chiziqli qavariq) sohalar

uchun Martinelli-Boxner integral formulasi asosida qurilgan.  $\square^n$  fazodagi bir jinsli sohalarda bunday formulalarni topish uchun avtomorfizmlar gruppasidan foydalanish mumkin (qarang [2]). Ushbu [3] maqolada Zigel sohalari, ya'ni bir jinsli chegaralanmagan sohalarning realizatsiyalari holati ko'rib chiqilgan va Zigel sohalari ostovlaridagi golomorf funksiyalarning qiymatlarini tiklovchi Karleman formulalari topilgan.

Quyidagi  $\mathfrak{R}$  matritsaviy soha berilgan bo'lsin (qarang [4-5])

$$\mathfrak{R} = \{Z \in [m \times k]: ZZ^* < I\},$$

bu yerda  $I$  matritsa  $[m \times m]$  tartibli birlik matritsa,  $Z^*$  esa  $Z$  matritsaning qo'shmasining transponerlangani.  $S$  – bu sohaning ostov (SHilov chegarasi),  $M \subset S$  to'plam va  $\mu M > 0$  bo'lsin. Bu sohada Karleman formulasini olish uchun dastlab,  $U$  birlik doira bo'lgan hol uchun qo'llaymiz: oldin funksiyaning 0 nuqtadagi qiymati uchun isbotlanadi, shundan keyin  $\mathfrak{R}$  sohaning barcha avtomorfizmidan foydalaniladi. Bunda  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$  va  $m = k$  bo'lganda.  $S_1$  ning parametrlari  $\xi = e^{i\varphi}u$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $u \in SU(k)$ , bu erda  $SU(k)$  gruppaning maxsus unitar matritsasi, u holda  $\det u = 1$ . Ravshanki,  $\det \xi = e^{ik\varphi} \det u = e^{ik\varphi}$ ,

$$\{\xi: \xi = \lambda u, |\lambda| = 1\}, u \in SU(k)$$

to'plamda  $SU(k)$  gruppaning elementlari  $k$  ga teng, bunda  $e^{ik\varphi} = 1$ .

**1-lemma ([2,5]).** *Xaar o'lchovi  $d\mu$  ni  $S_1$  ko'pxillikdagi ko'rinishini quyidagicha yozamiz:*

$$d\mu = h(u)d\varphi d\mu_0(u),$$

bu erda  $d\mu_0$  –  $SU(k)$  dagi Lebegning normalangan o'lchovi,  $h$  –  $SU(k)$  dagi silliq musbat funksiya.

**2-lemma ([2,5]).** Bizga  $f \in H^1(\mathfrak{R}_1)$  funksiya berilgan bo'lsin. U holda quyidagi formula o'rinli:

$$f(0) = \frac{k}{\int_{M'_0} d\mu_1} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(\xi) \left[ \frac{\phi_0(\xi)}{\phi_0(0)} \right]^j d\mu_\xi. \quad (2.1.2)$$

bo'ladi.

**1-teorema ([2,5]).** Bizga  $f \in H^1(\mathfrak{R}_1)$ ,  $m = k$  funksiya berilgan bo'lsin, unda ixtiyoriy  $A \in \mathfrak{R}_1$  nuqta uchun

$$f(A) = \frac{k}{\int_{M'_A} d\mu_A} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(\xi) \left[ \frac{\varphi_A(\xi)}{\varphi_A(A)} \right]^j H(A, \bar{\xi}) d\mu_\xi. \quad (2.1.3)$$

formula o'rinli.

Ushbu ishda  $\mathfrak{R}$  matritsaviy soha bilan bigolomrorf ekvivalent bo'lgan chegaralanmagan matritsaviy sohalar uchun yuqoridagi teoremani anoligi keltiriladi.

### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Carleman T. Les fonctions analytiques. – Paris, 1926. – 115 p.
2. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука. 1990. - 248 с.
3. Кытманов А.М., Никитина Т.Н. Многомерные формулы Карлемана в областях Зигелья // Известия вузов. Математика. – 1990. – № 3. – С. 7–12.
4. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.– М.: ИЛ, 1959. – 163 с.
5. Худайбергенов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Красноярск. 2017.-296 с.

**BIRINCHI TARTIBLI KELI DARAXTIDA SANOQLI SPIN QIYMATLI HC  
MODELI UCHUN UMUMLASHGAN  $p$ -ADIK GIBBS O'LCHOVINING  
MAVJUDLIGI.**

*I.A. Sattarov, Z. Darvishaliyeva*

*e-mail: [sattarovi-a@yandex.ru](mailto:sattarovi-a@yandex.ru), [darvishaliyevaziyodauzb@gmail.com](mailto:darvishaliyevaziyodauzb@gmail.com)*

**Keli daraxti.**  $k \geq 1$  tartibli  $\Gamma^k = (V, L)$  Keli daraxti har bir uchidan  $k + 1$  ta qirra chiquvchi siklsiz cheksiz graf, bu yerda  $V$  uchlar to'plami,  $L$  esa qirralar to'plami. Agar  $x$  va  $y$  uchlarni birlashtirib turuvchi  $l \in L$  qirra mavjud bo'lsa bu uchlar yaqin qo'shnilar deyiladi. Agar  $x$  va  $y$  yaqin qo'shnilar bo'lsa,  $l = \langle x, y \rangle$  kabi belgilaymiz. Ushbu  $\langle x, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y \rangle$  ko'rinishdagi yaqin qo'shnilar ketma-ketligi  $x$  dan  $y$  gacha bo'lgan yo'l deb ataladi.  $x$  dan  $y$  ga olib boruvchi eng qisqa yo'ldagi qirralar soniga  $x$  dan  $y$  gacha bo'lgan masofa deyiladi va  $d(x, y)$  kabi belgilanadi.

Biror  $x^0 \in V$  uchni tayinlab, uni daraxtning ildizi deymiz. Quyidagi to'plamlarni kiritamiz:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{i=1}^n W_i, \quad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Agar  $x^0$  dan  $y$  ga boruvchi yo'lga  $x$  uch orqali o'tilsa u holda  $x$  va  $y$  orasidagi munosabatni  $x < y$  kabi belgilaymiz.  $x, y$  yaqin qo'shnilar bo'lib,  $y > x$  bo'lsa u holda  $y$  uchni  $x$  uchning to'g'ri avlodi deb ataymiz.  $x$  ning to'g'ri avlodlari to'plamini  $S(x)$ , kabi belgilaymiz, ya'ni:  $S(x) = \{y \in W_{n+1} \mid d(x, y) = 1\}$ ,  $x \in W_n$ .

Keli daraxtida sanoqli spin qiymatli Hard Core (HC) modelini qaraymiz.  $V$  to'plamni  $\mathbb{Z}$  ga akslantirish sifatida berilgan  $\{\sigma(x) \mid x \in V\}$  to'plam konfiguratsiya deyiladi. Agar  $\sigma(x) \neq 0$  bo'lsa, u holda bu  $x \in V$  uchning band ekanligini, agar  $\sigma(x) = 0$  bo'lsa, u holda  $x \in V$  uch bo'sh (band emas) ekanligini bildiradi.  $V_n$  va  $W_n$  to'plamlardagi konfiguratsiyani ham shu usulda aniqlashimiz mumkin.

Agar  $V$  dagi eng yaqin  $\langle x, y \rangle$  qo'shnilar uchun  $\sigma(x)\sigma(y) = 0$  bo'lsa, u holda  $\sigma$  konfiguratsiya *joiz konfiguratsiya* deyiladi [1], ya'ni  $V$  to'plamdagi eng yaqin  $\langle x, y \rangle$  qo'shnilardan kamida bittasida konfiguratsiyaning qiymati nol bo'lishi kerak. Keli daraxtidagi (mos ravishda  $V_n$  dagi) barcha joiz konfiguratsiyalar to'plamini  $\Omega^a$  ( $\Omega_{V_n}^a$ ) kabi belgilaymiz.

Tayinlangan  $\lambda = (\dots \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots) \in \mathbb{Q}_p^\infty$  parametr uchun HC modelining  $p$ -adik Hamiltonianini quyidagicha aniqlaymiz:

$$H_\lambda(\sigma) = \sum_{x \in V} \log_p \lambda_{\sigma(x)}, \quad x \in \Omega^a.$$

**Umumlashgan  $p$ -adik Gibbs o'lchovi.** HC modeli uchun  $p$ -adik Gibbs o'lchovini aniqlaymiz.  $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^a$  uchun  $V_n$  shardagi  $\sigma_n$  konfiguratsiya natijasida band bo'lgan uchlar soni  $\#\sigma_n$  quyidagicha aniqlanadi:

$$\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \neq 0).$$

$\mathbf{z}: x \rightarrow \mathbf{z}_x = (\dots, \mathbf{z}_{-1,x}, \mathbf{z}_{0,x}, \mathbf{z}_{1,x}, \dots) \in \mathbb{Q}_p^\infty - V$  to'plamdagi vektor-qiymatli akslantirish bo'lsin.  $\Omega_{V_n}^a$  to'plamda  $\lambda_i \in \mathbb{Q}_p$  uchun quyidagicha aniqlangan  $\mu^{(n)}$   $p$ -adik ehtimollik taqsimotini qaraylik:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \lambda_i^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} \mathbf{z}_{\sigma_n(x), x}, \quad n \in N, \quad (1)$$

bu yerda  $Z_n$  – normallovchi ko'paytuvchi bo'lib,

$$Z_n = \sum_{\omega_n \in \Omega_{V_n}^a} \lambda_i^{\#\tilde{\sigma}_n} \prod_{x \in W_n} \mathbf{z}_{\tilde{\sigma}_n(x), x}.$$

kabi aniqlanadi. Agar barcha  $n \geq 1$  va  $\sigma_{(n-1)} \in \Omega_{V_{n-1}}^a$  uchun

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^a) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (2)$$

bo'lsa, u holda  $\mu^{(n)}$   $p$ -adik ehtimollik taqsimoti muvofiqlashgan deyiladi. Bu holda Kolmogorov teoremasiga ko'ra  $\Omega^a$  to'plamda barcha  $n$  va  $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^a$  uchun

$$\mu(\sigma|_{V_n} = \sigma_n) = \mu^{(n)}(\sigma_{n-1})$$

tenglikni qanoatlantiruvchi yagona  $\mu$  o'lchov mavjud.

**Ta'rif.** [2] (1) ko'rinishda aniqlangan va (2) shartni qanoatlantiruvchi  $\mu^{(n)}$  o'lchov HC modeli uchun  $\mathbf{z}: x \rightarrow z_x, x \in V \setminus \{x^0\}$  akslantirishga mos keluvchi umumlashgan  $p$ -adik Gibbs o'lchovi deyiladi.

**1-teorema.** [3] (1) formula bilan aniqlangan  $\mu^{(n)}$  ehtimollik o'lchovlari ketma-ketligi (2) shartni qanoatlantirishi uchun ixtiyoriy  $x \in V$  uchda quyidagi funksional tenglamani qanoatlantirishi zarur va yetarli:

$$\mathbf{z}_{i,x} = \lambda_i \prod_{y \in S(x)} \frac{1}{1 + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \mathbf{z}_{j,y}}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Endi (3) tenglamaning  $k = 1$  hol uchun translyatsion-invariant yechimlarini qidiramiz. Buning uchun quyidagi tenglamani yechish yetarli:

$$\mathbf{z}_i = \frac{\lambda_i}{1 + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \mathbf{z}_j}, \quad i \in \mathbb{Z}_0. \quad (4)$$

Bu tenglamada  $\sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \mathbf{z}_j$  va  $\sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \lambda_j$  qatorlar yaqinlashuvchi bo'lmasa, u holda (4) tenglama ma'noga ega bo'lmaydi. Shuning uchun bu ikkita qatorni yaqinlashuvchi deb faraz qilamiz. U holda

$$a - \frac{1}{4} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \lambda_j, \quad x - \frac{1}{2} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \mathbf{z}_j, \quad \text{va} \quad a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)$$

kabi belgilashlar natijasida (4) sistemadan

$$x^2 = a \quad (5)$$

Tenglamani hosil qilamiz. Ma'lumki, bu tenglama

A.  $\gamma(a) -$  juft;

B.  $p \neq 2$  uchun  $x^2 \equiv a_0 \pmod{p}$  taqqoslama yechimga ega,  $p = 2$  uchun  $a_1 = a_2 = 0$  shartlar bajarilganda yechimga ega bo'ladi. U holda quyidagicha xulosaga ega bo'lamiz:

**2-teorema.** Agar A va B shartlar bajarilsa, u holda birinchi tartibli Keli daraxtida sanoqli spin qiymatli HC modeli uchun translyatsion-invariant umumlashgan  $p$ -adik Gibbs o'lchovi mavjud bo'ladi.

### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. U. A. Rozikov and Sh. A. Shoyusupov, Theor. Math. Phys., 156, 1319–1330 (2008).
2. O.N. Khakimov. Theor. Math. Phys., 177(1), 1339–1351 (2013).
3. U.A. Rozikov, I.A. Sattarov, A.M. Tukhtabaev.  $p$ -Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2022. V14, N(S). pp. S30-S40.

### UCH O'LCHAMLI QO'ZG'ALISHGA EGA UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELINING XOS QIYMATLARI HAQIDA

*Sayliyeva Gulrux Rustam qizi*

*Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston*

*[g.r.saylieva@buxdu.uz](mailto:g.r.saylieva@buxdu.uz)*

$\mathbb{C}$  kompleks sonlar maydoni,  $L_2(\mathbb{T})$  – bir o'lchamli  $\mathbb{T} = (-\pi; \pi]$  torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosi bo'lsin.  $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$  va  $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$  fazolarning to'g'ri yig'indisidan tashkil topgan  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  Hilbert fazosida quyidagi

$$h_{\mu, \lambda} := \begin{pmatrix} h_{00} & \mu h_{01} \\ \mu h_{01}^* & h_{11}^0 - \lambda v \end{pmatrix} \quad (1)$$

operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda  $\mu, \lambda$ -nomanfiy haqiqiy sonlar,  $h_{\mu, \lambda}$  operatorli matritsaning  $h_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$ ,  $i \leq j$ ,  $i = 0, 1$  va  $v$  elementlari quyidagicha aniqlangan:

$$\begin{aligned}
h_{00}f_0 &= \varepsilon f_0, & h_{01}f_1 &= \int_{\mathbb{T}} \sin t f_1(t) dt, \\
(h_{11}^0 f_1)(x) &= (a + 1 - \cos(2x))f_1(x), & (2) \\
(vf_1)(x) &= \cos x \int_{\mathbb{T}} \cos t f_1(t) dt.
\end{aligned}$$

Bunda  $\varepsilon$  va  $a$  fikslangan haqiqiy sonlar,  $f_i \in \mathcal{H}_i$ ,  $i = 0, 1$ ,  $h_{01}^*$  operator  $h_{01}$  operatorga qo'shma operator. Odatda (1) ko'rinishdagi operatorli matritsaga umumlashgan Fridriks modeli deb ataladi [1,2]. Sodda hisoblashlar yordamida

$$(h_{01}^* f_0)(x) = \sin x \cdot f_0, f_0 \in \mathcal{H}_0$$

ekanligini hosil qilamiz.  $\mathcal{H}$  Hilbert fazosida (1) ko'rinishda aniqlangan  $h_{\mu,\lambda}$  umumlashgan Fridriks modeli chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

Chekli o'lchamli qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi mashhur Veyl teoremasiga asosan  $h_{\mu,\lambda}$  umumlashgan Fridriks modelining muhim spektri  $h_{0,0}$  operatorli matritsaning muhim spektriga teng bo'ladi, ya'ni  $\sigma_{\text{ess}}(h_{\mu,\lambda}) = \sigma_{\text{ess}}(h_{0,0})$ . Aniqlanishiga ko'ra,  $h_{0,0}$  operatorli matritsaning muhim spektri  $u(x) = a + 1 - \cos(2x)$  funksiyaning qiymatlar to'plamidan iborat. Shu sababli  $\sigma_{\text{ess}}(h_{0,0}) = [a, a + 2]$  bo'ladi. Demak,  $\sigma_{\text{ess}}(h_{\mu,\lambda}) = [a, a + 2]$  tenglik o'rinli ekan. Endi  $h_{\mu,\lambda}$  umumlashgan Fridriks modelining diskret spektrini o'rganish maqsadida mos ravishda  $\mathcal{H}$  va  $\mathcal{H}_1$  Hilbert fazolarida

$$h_{\mu}^{(1)} := \begin{pmatrix} h_{00} & \mu h_{01} \\ \mu h_{01}^* & h_{11}^0 \end{pmatrix}, \quad h_{\lambda}^{(2)} := h_{11}^0 - \lambda v$$

operatorlarni qaraymiz.

**1-teorema.** (a)  $z \in \mathbb{C} \setminus [a, a + 2]$  soni  $h_{\mu,\lambda}$  operatorning xos qiymati bo'lishi uchun uning  $h_{\mu}^{(1)}$  va  $h_{\lambda}^{(2)}$  operatorlardan kamida bittasining xos qiymati bo'lishi zarur va yetarlidir.

(b)  $h_{\mu,\lambda}$  operator ko‘pi bilan uchta xos qiymatlarga ega bo‘lib, ulardan ko‘pi bilan ikkitasi  $a$  nuqtadan chapda, ko‘pi bilan bittasi  $a + z$  dan o‘ngda joylashgan bo‘ladi.

### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. С.Н.Лакаев Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса. Труды сем.им. Петровского И.Г., 11 (1986), С. 210–238.
2. M.I.Muminov, T.H.Rasulov On the eigenvalues of a  $2 \times 2$  block operator matrix // Opuscula Mathematica. 35:3 (2015), 369–393.

## BRANCHES OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF THE OPERATOR MATRIX OF ORDER THREE

*Sharipova Mubina Shodmonovna*

*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

*m.sh.sharipova@buxdu.uz*

The essential spectrum of operator matrices is one of the topics that is deeply studied in the theory of operators, and the description of the location of the essential spectrum of this type of operators is studied among the important problems of spectral analysis [1,2].

$\mathbb{T}^1$  is a one-dimensional torus,  $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$  is a space of complex numbers,  $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^1)$  is a Hilbert space of square integrable (complex variable) functions on  $\mathbb{T}^1$  and  $\mathcal{H}_2 := L_2^s(\mathbb{T}^2)$  be a Hilbert space of square-integrable (complex variable) symmetric functions on  $\mathbb{T}^2$ . Denote by  $\mathcal{H}$ , the direct sum of the spaces  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_3$ , that is,  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ .

Let us consider a third-order operator matrix  $\mathcal{A}_\mu$  acting  $\mathcal{H}$  as

$$\mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} & 0 \\ \mu A_{01}^* & A_{11} & \mu A_{12} \\ 0 & \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \mu > 0 \quad (1)$$

with the entries:

$$A_{00}f_0 = \varepsilon f_0, \quad A_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^1} \sin(3t) f_1(t) dt;$$

$$(A_{11}f_1)(x) = (\varepsilon + 1 - \cos(3x))f_1(x), \quad A_{12}f_2(x) = \int_{\mathbb{T}^1} \sin(3t) f_2(x, t) dt;$$

$$(A_{22}f_2)(x, y) = (\varepsilon + 2 - \cos(3x) - \cos(3y))f_2(x, y), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1, 2.$$

It should be noted that the operator matrix  $\mathcal{A}_\mu$  given by (1) is a linear, bounded and self-adjoint operator in the Hilbert space  $\mathcal{H}$ .

In order to study the essential and discrete spectra of the operator matrix  $\mathcal{A}_\mu$ , we introduce the operator matrix  $h_\mu, \mu > 0$  called the generalized Friedrichs model acting in the space  $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  as

$$h_\mu = \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}, \mu > 0.$$

One can see that the operator matrix  $h_\mu$  is a linear, bounded and self-adjoint in  $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ .

Let us consider the operator matrix  $h_0$  in the Hilbert space  $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  as

$$h_0 = \begin{pmatrix} A_{00} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}.$$

The perturbation  $h_\mu - h_0$  of the operator matrix  $h_0$  is a self-adjoint operator of rank 2. According to the definition, for the spectrum of the operator  $h_0$  the equality

$$\sigma(h_0) = \sigma(A_{00}) \cup \sigma(A_{11})$$

holds, here

$$\sigma(A_{00}) = \sigma_{\text{disc}}(A_{00}) = \{\varepsilon\}; \quad \sigma(A_{11}) = \sigma_{\text{ess}}(A_{11}) = [\varepsilon; \varepsilon + 2].$$

Therefore, in accordance with the Weyl theorem about the invariance of the essential spectrum under finite rank perturbations, the essential spectrum of the operator matrix  $h_\mu$  coincides with the essential spectrum of  $h_0$ . Therefore,

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\mu) = \sigma_{\text{ess}}(h_0) = [\varepsilon, \varepsilon + 2].$$

For any fixed  $\mu > 0$  we consider an analytic function in  $\mathbb{C} \setminus [\varepsilon; \varepsilon + 2]$  by

$$\Delta_\mu(z) := \varepsilon - z - \mu^2 \int_{\mathbb{T}^1} \frac{\sin^2(3t) dt}{\varepsilon + 1 - \cos(3t) - z}.$$

Usually, the function  $\Delta_\mu(\cdot)$  is called the Fredholm determinant corresponding to the operator matrix  $h_\mu$ . The following lemma expresses the connection between the eigenvalues of the operator matrix  $h_\mu$  and zeros of  $\Delta_\mu(\cdot)$ .

**Lemma 1.** For any  $\mu > 0$  the operator  $h_\mu$  has an eigenvalue  $z_\mu \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon; \varepsilon + 2]$  if and only if  $\Delta_\mu(z_\mu) = 0$ .

Now, by studying the zeros of the function  $\Delta_\mu(\cdot)$ , we analyze the number and position of the eigenvalues of the operator matrix  $h_\mu$ .

**Lemma 2.** The operator matrix  $h_\mu$  has two simple eigenvalues, therefore one to the left of  $\varepsilon$  and the other to the right of  $\varepsilon + 2$ .

Let the numbers  $E_\mu^1$  and  $E_\mu^2$  are the eigenvalues of the operator matrix  $h_\mu$ . For clarity, we take  $E_\mu^1 \in (-\infty; \varepsilon)$  and  $E_\mu^2 \in (\varepsilon + 2; +\infty)$ .

The following theorem describes the essential spectrum of the operator matrix  $\mathcal{A}_\mu$ .

**Theorem 1.** The following equality holds for the essential spectrum of the operator matrix  $\mathcal{A}_\mu$ :

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = [E_\mu^1; E_\mu^1 + 2] \cup [\varepsilon; \varepsilon + 4] \cup [E_\mu^2; E_\mu^2 + 2].$$

**Definition 1.** The sets

$$[E_\mu^1; E_\mu^1 + 2] \cup [E_\mu^2; E_\mu^2 + 2] \text{ and } [\varepsilon; \varepsilon + 4]$$

are called two-particle and three-particle branches of the essential spectrum of the operator matrix  $\mathcal{A}_\mu$ , respectively. We denote these branches as  $\sigma_{\text{two}}(\mathcal{A}_\mu)$  and  $\sigma_{\text{three}}(\mathcal{A}_\mu)$ , i.e.

$$\sigma_{\text{two}}(\mathcal{A}_\mu) = [E_\mu^1; E_\mu^1 + 2] \cup [E_\mu^2; E_\mu^2 + 2],$$

$$\sigma_{\text{three}}(\mathcal{A}_\mu) = [\varepsilon; \varepsilon + 4].$$

Since  $E_\mu^1 < \varepsilon$  and  $E_\mu^2 > \varepsilon + 2$  for all  $\mu > 0$ , one can conclude that

$$\min \sigma_{\text{two}}(\mathcal{A}_\mu) < \min \sigma_{\text{three}}(\mathcal{A}_\mu) \text{ and } \max \sigma_{\text{three}}(\mathcal{A}_\mu) < \max \sigma_{\text{two}}(\mathcal{A}_\mu)$$

for all  $\mu > 0$ .

### Literatures:

1.C.Tretter. Spectral theory of block operator matrices and applications. Imperial College Press, 2008.

2.T.H.Rasulov, N.A.Tosheva. Analytic description of the essential spectrum of a family of  $3 \times 3$  operator matrices. Nanosystems: Physics, chemistry, mathematics, 10:5(2019), pp. 511-519.

## UCHNCHI TARTIBLI OPERATORLI MATRITSALAR OILASI

### UCHUN BIRMAN-SHVINGER PRINSIPI

*Tosheva Nargiza Ahmedovna*

*Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston*

*nargiza\_n@mail.ru*

$\mathbb{C}$  orqali bir o'lchamli kompleks fazoni,  $L_2(\mathbb{T}^3)$  orqali  $\mathbb{T}^3$  da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) funksiyalarning Hilbert fazosini,  $L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$  orqali  $(\mathbb{T}^3)^2$  da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosini hamda  $\mathcal{H}$  orqali  $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$  va  $\mathcal{H}_2 := L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$  fazolarning to'g'ri yig'indisini belgilaymiz, ya'ni  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . Bunda  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_1$  va  $\mathcal{H}_2$  fazolarga  $L_2(\mathbb{T}^3)$  fazo yordamida qurilgan  $\mathcal{F}_s(L_2(\mathbb{T}^3))$  bozonli Fok fazoning mos ravishda nol zarrachali, bir zarrachali va ikki zarrachali qism fazolari deyiladi.

$\mathcal{H}$  Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi quyidagi

$$H(K) := \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix}$$

uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasini qaraymiz. Bu yerda matritsaviy elementlar

$$H_{00}(K)f_0 = w_0(K)f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v_0(t)f_1(t)dt;$$

$$(H_{11}(K)f_1)(p) = w_1(K; p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} v_1(t)f_2(p, t)dt;$$

$$(H_{22}(K)f_2)(p, q) = w_2(K; p, q)f_2(p, q), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1, 2$$

kabi aniqlangan bo'lib,  $H_{ij}^*$  ( $i < j$ ) orqali  $H_{ij}$  operatorga qo'shma operator belgilangan. Bundan tashqari  $w_0(\cdot)$  va  $v_i(\cdot)$ ,  $i = 0, 1$  funksiyalar  $\mathbb{T}^3$  da aniqlangan haqiqiy qiymatli chegaralangan funksiyalar,  $w_1(\cdot; \cdot)$  va  $w_2(\cdot; \cdot, \cdot)$  funksiyalar esa mos ravishda

$$w_1(K; p) := l_1\varepsilon(p) + l_2\varepsilon(K - p) + 1,$$

$$w_2(K; p, q) := l_1\varepsilon(p) + l_1\varepsilon(q) + l_2\varepsilon(K - p - q),$$

tengliklar yordamida aniqlanib,  $l_1, l_2 > 0$  va

$$\varepsilon(q) := \sum_{i=1}^3 (1 - \cos(nq^{(i)})), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) \in \mathbb{T}^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ta'kidlash joizki,  $H_{01}$  va  $H_{12}$  operatorlarga yo'qotish operatorlari,  $H_{01}^*$  va  $H_{12}^*$  operatorlarga esa paydo qilish operatorlari deyiladi.

$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  fazoda ta'sir qiluvchi hamda o'z-o'ziga qo'shma  $\hat{T}(K, z)$ ,  $z < \tau_{\text{ess}}(K)$  kompakt ikkinchi tartibli operatorli matritsani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\hat{T}(K, z) := \begin{pmatrix} \hat{T}_{00}(K, z) & \hat{T}_{01}(K, z) \\ \hat{T}_{01}^*(K, z) & \hat{T}_{11}(K, z) \end{pmatrix}.$$

Uning matritsaviy elementlari quyidagicha aniqlangan:

$$\hat{T}_{00}(K, z)g_0 = (1 + z - w_0(K))g_0, \quad \hat{T}_{01}(K, z)g_1 = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_0(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\Delta(K - t; z - l_1\varepsilon(t))}};$$

$$(\hat{T}_{11}(K, z)g_1)(p) = \frac{v_1(p)}{2\sqrt{\Delta(K-p; z-l_1\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(w_2(K; p, t) - z)^{-1}v_1(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\Delta(K-t; z-l_1\varepsilon(t))}}.$$

Bunda  $g_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1$  va

$$(\hat{T}_{01}^*(K, z)g_0)(p) = -\frac{v_0(p)g_0}{\sqrt{\Delta(K-p; z-l_1\varepsilon(p))}}, \quad g_0 \in \mathcal{H}.$$

$\mathcal{H}$  Gilbert fazosida ta'sir qiluvchi  $\mathcal{A}$  chiziqli, chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operator uchun  $n(\gamma, \mathcal{A})$  sonini quyidagi qoida yordamida aniqlaymiz:

$$n(\gamma, \mathcal{A}) = \sup\{\dim F: (\mathcal{A}u, u) > \gamma, u \in F \subset \mathcal{H}, \|u\| = 1\}.$$

Agar  $\gamma < \max \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$  bo'lsa, u holda  $n(\gamma, \mathcal{A})$  soni cheksizga teng bo'ladi, agar  $n(\gamma, \mathcal{A})$  soni chekli bo'lsa, u holda bu son  $\mathcal{A}$  operatorning  $\gamma$  dan katta xos qiymatlar soniga (karraliklari bilan qo'shib hisoblaganda) teng bo'ladi.

$\tau_{\text{ess}}(K)$  orqali  $H(K)$  kanal operatorli matritsa muhim spektrining quyi chegarasini belgilaymiz, ya'ni *ya'ni*

$$\tau_{\text{ess}}(K) := \min \sigma_{\text{ess}}(H(K)).$$

$N(K, z)$  orqali  $H(K)$  operatorli matritsaning  $z \leq \tau_{\text{ess}}(K)$  dan chapda joylashgan xos qiymatlari sonini belgilaymiz. U holda

$$N(K, z) = n(-z, -H(K)), \quad -z > -\tau_{\text{ess}}(K)$$

tenglik o'rinlidir.

Quyidagi natija  $H(K)$  operatorli matritsa uchun mashhur Birman-Shvinger prinsipini ifodalaydi.[1-3]

**Teorema.** *Faraz qilaylik,  $K \in \mathbb{T}^3$  bo'lsin. U holda  $\hat{T}(K, z)$  operatorli matritsa  $z < \tau_{\text{ess}}(K)$  bo'lganda kompakt va uzluksiz hamda*

$$N(K, z) = n(1, \hat{T}(K, z))$$

tenglik o'rinlidir.

### Foydalanilgan adabiyotlar

1.S. Albeverio, S. N. Lakaev and Z. I. Muminov, Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. *Ann. Henri Poincaré*. **5**:743–772 (2004).

2.A. V. Sobolev, The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics, *Commun. Math. Phys.* **156**:127–168 (1993).

## MATRITSAVIY MODEL OPERATOR XOS QIYMATLARIGA MOS FADDEYEV TENGLAMASI

*Xayitova Xilola G‘afurovna*

*Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston*

*e-mail: x.g.xayitova@buxdu.uz*

$\mathbb{T}^3$  orqali uch o‘lchamli torni,  $\mathbb{C}$  orqali bir o‘lchamli kompleks sonlar fazosini belgilaymiz.  $L_2(\mathbb{T}^3)$  orqali  $\mathbb{T}^3$  da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosini,  $L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2)$  orqali  $(\mathbb{T}^3)^2$  da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi antisimmetrik funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.  $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$  va  $\mathcal{H}_2 := L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2)$  fazolarning to‘g‘ri yig‘indisini  $\mathcal{H}$  orqali belgilaymiz, ya’ni

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2.$$

$\mathcal{H}$  Hilbert fazosida aniqlangan

$$H_{\mu,\lambda}(\gamma) := \begin{pmatrix} H_{11} & \lambda H_{12} \\ \lambda H_{12}^* & H_{22}^0(\gamma) - \mu V \end{pmatrix},$$

uchta  $\mu, \lambda, \gamma$  spektral parametrlardan bog‘liq operatorli matritsani qaraymiz. Uning matritsaviy elementlari quyidagicha aniqlangan

$$(H_{11}f_1)(x) = u(x)f_1(x), \quad (H_{12}f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}^3} v(t)f_2(x, t)dt,$$

$$(H_{22}^0(\gamma)f_2)(x, y) = \omega_\gamma(x; y)f_2(x, y), \quad V = V_1 + V_2,$$

$$(V_1f_2)(x, y) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(x, t)dt, \quad (V_2f_2)(x, y) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(t, y)dt.$$

Bu yerda  $\mu, \lambda > 0$ ;  $u(\cdot)$  va  $v(\cdot)$  funksiyalar  $\mathbb{T}^3$  da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar,  $\omega_\gamma(\cdot; \cdot)$  esa

$$\omega_\gamma(x; y) = (\varepsilon(x) + \varepsilon(y) + \gamma\varepsilon(x + y)), \quad \varepsilon(x) = \sum_{k=1}^3 (1 - \cos x_k)$$

kabi aniqlangan funksiya bo'lib,  $\gamma$  – haqiqiy son. Funktsional analiz elementlaridan foydalanib,

$$(H_{12}^* f_1)(x, y) = \frac{1}{2} (v(y)f_1(x) - v(x)f_1(y))$$

bo'lishini ko'rsatish mumkin. Yuqoridagi kabi aniqlangan  $H_{\mu, \lambda}(\gamma)$  operatorli matritsa  $\mathcal{H}$  Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.  $H_{\mu, \lambda}(\gamma)$  operatorli matritsaning diskret xos qiymatlariga mos xos vektor-funksiyalari uchun Faddeyev tipdagi integral tenglamalar sistemasi va uning ko'rinishini keltirib chiqaramiz.

$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  fazoda

$$h_{\mu, \lambda}(\gamma, x) = \begin{pmatrix} h_{00}(x) & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h_{01} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h_{01}^* & h_{11}^0(\gamma, x) - \mu v \end{pmatrix}$$

kabi aniqlanuvchi hamda umumlashgan Fridriks modeli deb ataluvchi operatorli matritsani qaraymiz. Uning matritsaviy elementlari quyidagicha aniqlangan:

$$h_{00}(x)f_0 = U(x)f_0, \quad h_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v(t)f_1(t)dt,$$

$$(h_{01}^* f_0)(y) = v(y)f_0, \quad (h_{11}^0(\gamma, x)f_1)(y) = \omega_\gamma(x; y)f_1(y),$$

$$(vf_1)(y) = \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)dt.$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\sigma_{\text{ess}}(h_{\mu,\lambda}(\gamma, x)) = [m_\gamma(x); M_\gamma(x)],$$

$$\sigma_{\mu,\lambda}(\gamma) := \bigcup_{x \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h_{\mu,\lambda}(\gamma; x)),$$

$$m_\gamma = \min_{y \in \mathbb{T}^3} \omega_\gamma(x; y), \quad M_\gamma = \max_{y \in \mathbb{T}^3} \omega_\gamma(x; y), \quad \Sigma_{\mu,\lambda} := [m_\gamma; M_\gamma] \cup \sigma_{\mu,\lambda}(\gamma).$$

Quyidagi fazoni kiritamiz:

$$L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3) := \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2): \varphi_i \in L_2(\mathbb{T}^3), \quad i = 1, 2\}.$$

Har bir tayinlangan  $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\mu,\lambda}(\gamma)$  soni uchun  $L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)$  Hilbert fazosida

$$T_{\mu,\lambda}(\gamma; z) := \mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{-1}(\gamma; z) \mathcal{K}_{\mu,\lambda}(\gamma; z)$$

kabi aniqlangan ikkinchi tartibli operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda

$$\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(\gamma; z) = \begin{pmatrix} A_{11}(\mu, \lambda, \gamma; z) & A_{12}(\mu, \lambda, \gamma; z) \\ A_{21}(\mu, \lambda, \gamma; z) & A_{22}(\mu, \lambda, \gamma; z) \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(\gamma; z)$  operatorli matritsaning  $\mathcal{A}_{i,j}(\mu, \lambda, \gamma; z)$  matritsaviy elementlari  $a_{i,j}(\mu, \lambda, \gamma; \cdot, z)$ ,  $i, j = 1, 2$  funksiyaga ko'paytirish operatori bo'lib,

$$a_{11}(\mu, \lambda, \gamma; x, z) = u(x) - z - \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v^2(t) dt}{\omega_\gamma(x; t) - z},$$

$$a_{12}(\mu, \lambda, \gamma; x, z) = \lambda \mu \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v(t) dt}{\omega_\gamma(x; t) - z},$$

$$a_{21}(\mu, \lambda, \gamma; x, z) = \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v(t) dt}{\omega_\gamma(x; t) - z},$$

$$a_{22}(\mu, \lambda, \gamma; x, z) = 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{\omega_\gamma(x; t) - z},$$

$\mathcal{K}_{\mu,\lambda}(\gamma; z)$  esa

$$\mathcal{K}_{\mu,\lambda}(\gamma; z) = \begin{pmatrix} K_{11}(\mu, \lambda, \gamma; z) & K_{12}(\mu, \lambda, \gamma; z) \\ K_{21}(\mu, \lambda, \gamma; z) & K_{22}(\mu, \lambda, \gamma; z) \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lib, uning  $K_{i,j}(\mu, \lambda, \gamma; z)$ ,  $i, j = 1, 2$  matritsaviy elementlari quyidagicha aniqlangan integral operatorlardan iborat:

$$(K_{11}(\mu, \lambda, \gamma; z)\varphi_1)(x) = \frac{\lambda^2 v(x)}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v(t)\varphi_1(t)dt}{\omega_\gamma(x; t) - z},$$

$$(K_{12}(\mu, \lambda, \gamma; z)\varphi_2)(x) = \lambda\mu \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v(t)\varphi_2(t)dt}{\omega_\gamma(x; t) - z},$$

$$(K_{21}(\mu, \lambda, \gamma; z)\varphi_1)(x) = -\frac{\lambda v(x)}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_1(t)dt}{\omega_\gamma(x; t) - z},$$

$$(K_{22}(\mu, \lambda, \gamma; z)\varphi_2)(x) = -\mu \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi_2(t)dt}{\omega_\gamma(x; t) - z}.$$

Bunda  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)$ . Ta'kidlash joizki, har bir  $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\mu, \lambda}(\gamma)$  soni uchun  $T_{\mu, \lambda}(\gamma; z)$  kompakt operator bo'ladi.

Quyidagi lemma  $H_{\mu, \lambda}(\gamma)$  operatorli matritsa uchun mashhur Faddeyev natijasining analogi bo'lib,  $H_{\mu, \lambda}(\gamma)$  va  $T_{\mu, \lambda}(\gamma; z)$  operatorli matritsalarining xos qiymatlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

**Teorema.** *Har bir tayinlangan  $\mu, \lambda, \gamma$  sonlari uchun  $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\mu, \lambda}(\gamma)$  soni  $H_{\mu, \lambda}(\gamma)$  operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi uchun 1 soni  $T_{\mu, \lambda}(\gamma; z)$  operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarlidir. Bundan tashqari,  $z$  va 1 xos qiymatlar bir xil karralikka egadir.*

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Estimates for the bounds of the essential spectrum of a  $2 \times 2$  operator matrix. Contemporary Mathematics. 1:4 (2020), P. 170–182.

## EXAMPLE OF TWO-DIMENSIONAL QnSO

*S.S. Xudayarov*

*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

*Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy,*

*Bukhara, Uzbekistan*

*E-mail: [s.s.xudayarov@buxdu.uz](mailto:s.s.xudayarov@buxdu.uz)*

Let  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ . A distribution (or state) of the set  $I$  is a probability measure  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , i.e. an element of the simplex:

$$S^{m-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}. \quad (1)$$

The quadratic stochastic operator (QSO) is a mapping of the simplex  $S^{m-1}$  into itself, of the form

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \dots, m \quad (2)$$

where  $P_{ij,k}$  are coefficients of heredity and

$$P_{ij,k} \geq 0, \quad P_{ij,k} = P_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad (3)$$

Thus, each quadratic stochastic operator  $V$  can be uniquely defined by a cubic matrix  $\mathbf{P} = (P_{ij,k})_{i,j,k=1}^m$  with conditions (3).

For a given  $x^{(0)} \in S^{m-1}$  the trajectory (orbit)  $\{x^{(n)}\}$  of  $x^{(0)}$  under the action of QSO (2) is defined by

$$x^{(n+1)} = V(x^{(n)}), \text{ where } n = 0, 1, 2, \dots$$

In general, a quadratic operator  $V$ ,  $V : x \in \mathbb{R}^m \rightarrow x' = V(x) \in \mathbb{R}^m$  corresponding to a cubic matrix  $\mathbf{P}$  is defined by (2). Without loss of generality we assume  $P_{ij,k} = P_{ji,k}$ . Indeed, if this equality is not satisfied then we can introduce  $\bar{P}_{ij,k} = \frac{1}{2}(P_{ij,k} + P_{ji,k})$ .

**Definition.** A quadratic operator (2), preserving a simplex, is called non-stochastic (QnSO) if at least one of its coefficients  $P_{ij,k}$ ,  $i \neq j$  is negative.

Now we study the following example of QnSO on the 2D-simplex  $S^2$ :

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y^2 + z^2 - axy - axz + 2yz \\ y' &= (2+a)xy \\ z' &= (2+a)xz, \end{aligned} \quad (4)$$

where  $a \in [0, 2]$ . Note that  $P_{12,1} = P_{13,1} = -a/2$ .

The following points are fixed points of the operator (4):

$$p_y = \left( \frac{1}{2+a}, y, 1 - \frac{1}{2+a} - y \right), \text{ where } y \in \left[ 0, 1 - \frac{1}{2+a} \right].$$

**On invariant sets.** Recall that a set  $M$  is called invariant with respect to an operator  $V$  if  $V(M) \subset M$ .

It is easy to see that the following sets are invariant with respect to (4):

$$M_0 = \{(x, y, z) \in S^2 : y = 0\}, \quad M_1 = \{(x, y, z) \in S^2 : z = 0\},$$

$$M_\omega = \{(x, y, z) \in S^2 : y = \omega z\}, \quad \omega \in [0, +\infty).$$

**Remark.** As we have seen, the operator (4) is chaotic for  $1.56995 < a \leq 2$ , but it is not chaos on the simplex in the sense of Devaney. Because, it is not topologically transitive. It is splitted chaos meaning that the simplex is partitioned into uncountably many invariant subsets and the restriction of the operator (4) on each invariant set is chaos in the sense of Devaney.

### References

1. Devaney R.L. // An introduction to chaotic dynamical systems. Boulder, Stud. Nonlinearity, Westview Press, 2003.
2. Rozikov U.A, Xudayarov S.S. Quadratic non-stochastic operators: examples of splitted chaos // Annals of Functional Analysis. 13:17, (2022). P. 1-17

## О ЧИСЛЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

<sup>1</sup> Халхужаев А.М., <sup>2</sup> Боймуродов Ж.Х.

<sup>1</sup> Институт математики им. В.И. Романовского, Самарканд, Узбекистан

<sup>2</sup> Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан

e-mail: ahmad\_x@mail.ru, jurabek.boymurodov@mail.ru

В работе [1] рассматривается система трех частиц (две из них - бозоны, а третья - произвольная), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Описан существенный спектр ассоциированного этой системе трехчастичного оператора  $H_{\mu_1\mu_3}(K)$ . Доказано существование эффекта Ефимова для  $H_{\mu_1\mu_3}(0)$  в случаях, когда либо две, либо три двухчастичные

подсистемы трех частиц имеют виртуальные уровни на левом крае трехчастичного существенного спектра (т.е. когда  $\mu_1 = \mu_1^0$  и  $\mu_2 \in [0, \mu_2^0)$  или  $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$ ,  $\alpha = 1,3$ ), а также показана конечность числа связанных состояний при малых значениях параметра  $K \neq 0$ , для любого фиксированного  $\gamma > 0$ . Рассматриваемый нами оператор  $H_{\mu,\lambda,\gamma}(K)$ ,  $K \in \mathbb{T}^3$  совпадает с оператором  $H_{\mu_1\mu_3}(K)$ , если учитывать обозначения  $\mu = \mu_1$ ,  $\lambda = \mu_3$ .

Одна из «двухчастичных ветвей»  $[\tau_{min}(\mu, \gamma), \tau_{max}(\mu, \gamma)]$  существенного спектра оператора  $H_{\mu,\lambda,\gamma}(\mathbf{0})$  сдвигается к  $-\infty$  с порядком  $\mu$  при  $\mu \rightarrow +\infty$ , в результате которого бесконечное число собственных значений оператора "поглощаются" существенным спектром. Поэтому возникает естественный вопрос: существуют ли собственные значения оператора  $H_{\mu,\lambda,\gamma}(\mathbf{0})$ , лежащие левее существенного спектра при достаточно больших  $\mu$  и фиксированном  $\lambda > 0$ , и если существуют, то сколько?

В данной работе доказывается, что существуют критические значения отношений масс  $\gamma_1 \approx 2,9417$  и  $\gamma_2 \approx 5,3985$  такие, что при любом  $\lambda > 0$  и  $\gamma \in (0, \gamma_1)$  оператор  $H_{\mu,\lambda,\gamma}(\mathbf{0})$  имеет по крайней мере одно собственное значение, а при  $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$  оператор  $H_{\mu,\lambda,\gamma}(\mathbf{0})$  имеет по крайней мере два и при  $\gamma \in (\gamma_2, +\infty)$  имеет не менее четырех собственных значений, лежащих левее существенного спектра для достаточно больших значений  $\mu > 0$ .

Пусть  $\mathbb{T}^3$ -трехмерный тор,  $L_2[(\mathbb{T}^3)^d]$ ,  $d = 1,2$ -гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на  $(\mathbb{T}^3)^d$  и  $L_2^{sym}[(\mathbb{T}^3)^2] \subset L_2[(\mathbb{T}^3)^2]$ -подпространство симметричных функций относительно перестановки переменных.

Трехчастичный дискретный оператор Шредингера  $H_{\mu,\lambda,\gamma}(K)$ ,  $K \in \mathbb{T}^3$ , ассоциированный с системой трех частиц (две из них - бозоны с массой 1 и одна - произвольная с массой  $m = 1/\gamma < 1$ ), взаимодействующих с помощью

парных контактных потенциалов  $\mu > 0$  и  $\lambda > 0$  на трехмерной решетке  $\mathbb{Z}^3$ , действует в гильбертовом пространстве  $L_2^{sym}[(\mathbb{T}^3)^2]$  по формуле (см. напр. [1])

$$H_{\mu,\lambda,\gamma}(\mathbf{K}) = H_{0,\gamma}(\mathbf{K}) - \mu(V_1 + V_2) - \lambda V_3,$$

где

$$(H_{0,\gamma}(\mathbf{K})f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{\mathbf{K},\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q})f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

$$E_{\mathbf{K},\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \xi(\mathbf{p}), \quad \xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \cos p_i, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

$$(V_1 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (V_2 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\mathbf{s},$$

$$(V_3 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{s}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

На торе  $\mathbb{T}^3$  выбрана единичная мера  $d\mathbf{p}$ , т.е.

$$\int_{\mathbb{T}^3} d\mathbf{p} = 1.$$

Вводим следующие обозначения

$$W = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})}, \quad W_{11} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_1 d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})}, \quad W_{12} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_1 \cos s_2 d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})}.$$

Интеграл  $W$  называется интегралом Ватсона, а интегралы  $W_{11}$  и  $W_{12}$  - интегралами типа Ватсона (см. например [3]).

Пусть

$$\gamma_1 = \frac{3W}{3W - 1} \approx 2,9417, \quad \gamma_2 = \frac{1}{W_{11} - W_{12}} \approx 5,3985.$$

Основные результаты приводятся для случая  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$  и состоят из следующей теоремы:

**Теорема.** Пусть  $\lambda > 0$ . Если  $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$ , то существует  $\mu(\gamma, \lambda) > 0$  такое, что для любого  $\mu > \mu(\gamma, \lambda)$  оператор  $H_{\mu,\lambda,\gamma}(\mathbf{0})$  имеет не менее двух собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

## Литература

1. Лакаев С. Н., Муминов М. Э., “Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке”, *ТМФ*, **135** (2003), 478-503.
2. Abbullaev J. I., Khalkhuzhaev A. M., Kuliev K.D., “The existence of eigenvalues of Schrödinger operator on three dimensional lattice”, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 28:3 (2002), 189-208.
3. Zucker I.J., “70+ Years of the Watson Integrals”, *J Stat Phys*, **145** (2011), 591-612.

## АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ БИЛАПЛАСИАНА С ВОЗМУЩЕНИЕМ РАНГА ОДИН НА ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

<sup>1</sup>Халхужаев А. М., <sup>2</sup>Мажидова М.Г.

<sup>1</sup>Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

*Romanovskiyy nomidagi Matematika instituti Samarqand bo'linmasi,*

*ahmad\_x@mail.ru, muqaddasmajidova9918@gmail.com*

Пусть  $\ell^2(\mathbb{Z})$  - гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определённых на  $\mathbb{Z}$ . Мы изучаем спектральные свойства семейства самосопряженных дискретных операторов  $\hat{H}_\mu$  в гильбертовом пространстве  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :

$$\hat{H}_\mu := \hat{H}_0 - \mu \hat{V}, \quad \mu > 0,$$

т.е., типа операторов Шредингера на одномерной решётке.

Здесь  $\hat{H}_0$  - дискретный билапласиан, т.е.

$$\hat{H}_0 := \hat{\Delta} \hat{\Delta},$$

где

$$\hat{\Delta} \hat{f}(x) = \hat{f}(x) - \frac{\hat{f}(x+1) + \hat{f}(x-1)}{2}, \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

дискретный лапласиан, и  $\hat{V}$  - оператор ранга один:

$$(\hat{V}\hat{f})(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\hat{f}(2) + \frac{1}{4}\hat{f}(-2), & x = \pm 2, \\ 0, & x \neq \pm 2. \end{cases}$$

Обозначим через

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}), \quad (\mathcal{F}\hat{f})(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \hat{f}(x) e^{ix \cdot p}$$

преобразование Фурье с обратным отображением

$$\mathcal{F}^{-1}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}} f(p) e^{-ix \cdot p} dp,$$

где  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $p \in \mathbb{T}$ .

Пусть  $L^2(\mathbb{T})$  - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определённых на  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ . В импульсном представлении оператор  $\hat{H}_\mu$ , действует в пространстве  $L^2(\mathbb{T})$  по формуле:

$$H_\mu := H_0 - \mu V, \quad \mu \geq 0,$$

где  $H_0 := \mathcal{F}\hat{H}_0\mathcal{F}^{-1}$  - оператор умножения в  $L^2(\mathbb{T})$  на функцию

$$\varepsilon(q) := (1 - \cos q)^2,$$

и  $V := \mathcal{F}\hat{V}\mathcal{F}^{-1}$  - интегральный оператор ранга один

$$(Vf)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos 2p \cos 2q f(q) dq.$$

Так как

$$\sigma(H_0) = \sigma_{ess}(H_0) = [0, 4],$$

в силу компактности оператора  $V$  и теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях имеем

$$\sigma_{ess}(H_\mu) = \sigma_{ess}(H_0) = [0, 4]$$

для любого  $\mu > 0$ .

**Теорема 1.** Для любого  $\mu > 0$  оператор  $H_\mu$  имеет единственное собственное значение  $e(\mu)$  вне существенного спектра, а соответствующая собственная функция имеет вид

$$f_\mu(p) := \frac{\cos 2p}{\varepsilon(p) - e(\mu)}.$$

Кроме того:

1.  $e(\mu) < 0$  для любого  $\mu > 0$ ;

2. функция  $\mu \in (0, +\infty) \mapsto e(\mu)$  вещественно-аналитическая, строго убывающая, строго вогнутая в  $(0, +\infty)$  с асимптотикой

$$\lim_{\mu \searrow 0} e(\mu) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{e(\mu)}{\mu} = -\frac{1}{2}, \quad (1)$$

3. для достаточно малых и положительных  $\mu$  верно равенство

$$(-e(\mu))^{1/4} = \sum_{n \geq 1} A_n \mu^{n/3}, \quad (2)$$

где  $A_n, n = 1, 2, \dots$ , - действительные коэффициенты с

$$A_1 = 2^{-1/3}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{31}{24}, \quad A_4 = -\frac{20 \cdot 2^{-2/3}}{3}.$$

## GENERALIZATION OF THE CAUCHY INTEGRAL FORMULA FOR A CLASS OF FUNCTIONS $H_A^1$

<sup>1</sup>Zhabborov N. M., <sup>2</sup>Husenov B.E.

<sup>1</sup>Joint Belarus-Uzbekistan Intersectoral Institute of Applied Technical Qualifications,  
Tashkent, Uzbekistan

<sup>2</sup>Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan  
[jabborov61@mail.ru](mailto:jabborov61@mail.ru), [husenovbehzod@mail.ru](mailto:husenovbehzod@mail.ru)

Let  $A(z) \in C^m(D)$  be an antianalytic function, i.e.  $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$  in the domain  $D \subset \mathbb{C}$ ;

moreover, let  $|A(z)| \leq c < 1$  for all  $z \in D$ , where  $c = \text{const}$ . The function  $f(z)$  is said to be  $A(z)$ -analytic in the domain  $D$  if for any  $z \in D$ , the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z) \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1)$$

We denote by  $O_A(D)$  the class of all  $A(z)$ -analytic functions defined in the domain  $D$ .

Now we assume that the domain  $D \subset \mathbb{C}$  is convex and  $\zeta \in D$  its fixed point. We consider the function

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - \zeta + \overline{\int_{\gamma(\zeta, z)} \bar{A}(\tau) d\tau}}, \quad (2)$$

where  $\gamma(\zeta, z)$  is a smooth curve which connects the points  $\zeta, z \in D$ . Since the domain is simply connected and the function  $\bar{A}(z)$  is holomorphic, then the integral  $I(z) = \int_{\gamma(\zeta, z)} \bar{A}(\tau) d\tau$  does not depend on the integration; it coincides with a primitive,

i.e.  $I'(z) = \bar{A}(z)$ .

According to, the function

$$\psi(z, a) = z - a + \overline{\int_{\gamma(a, z)} \bar{A}(\tau) d\tau}$$

is an  $A(z)$ -analytic function, where  $a, z \in D$ .

The following set is an open subset of  $D$ :

$$L(a, r) = \left\{ \left| \psi(z, a) \right| = \left| z - a + \overline{\int_{\gamma(a, z)} \bar{A}(\tau) d\tau} \right| < r \right\}.$$

For sufficiently small  $r > 0$ , this set compactly lies in  $D$  (we denote this fact by  $L(a, r) \subset\subset D$ ) and contains the point  $a$ . This set  $L(a, r)$  is called the  $A(z)$ -lemniscate centered at the point  $a$ . The lemniscate  $L(a, r)$  is a simply-connected set (see [4]).

Initially, we introduce the Hardy class for  $A(z)$ -analytic functions. Let the convex domain  $D \subset \mathbb{C}$  have a smooth boundary  $\partial D$ . Then the Hardy classes  $H^p$  by definition consist of  $A(z)$ -analytic functions  $f \in O_A(D)$ , and  $\forall \varepsilon > 0$ , for which

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D} |f(\zeta - \varepsilon \nu_\zeta)|^p |d\zeta + A(\zeta) d\bar{\zeta}| < \infty, \quad (3)$$

where  $\nu_\zeta$  is the vector (unit) of the external normal to  $\partial D$  at point  $\zeta$  and  $p > 0$ . The Hardy class in the domain of  $D$  is  $A(z)$ -analytic functions is denoted as  $H_A^p$ .

Now, we introduce an angular limit for  $A(z)$ –analytic functions.

**Designation 1.** The  $A(z)$ –analytic function  $f^*(\zeta)$  is denoted the (angular or non-tangential) boundary function for function  $f(z)$ ; we will often write

$$f^*(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) \text{ a.e. } \zeta \in \partial L(a; r).$$

Here, if we fix  $\zeta_0 \in \partial L(a; r)$ , and insert  $\psi(z; a) = \rho e^{i\theta}$ ,  $\psi(\zeta_0; a) = r e^{i\varphi_0}$ , substitutions, then  $f(z)$  tends to  $f^*(\zeta)$  with  $z$  tending to  $\zeta_0$  inside any sector of the form  $|\theta - \varphi_0| \leq c_1(r - \rho)$ , where  $c_1 = \text{const}$ ,  $0 < \theta < 2\pi$  and  $0 < \varphi_0 < 2\pi$ .

We show that class  $H_A^1$  coincides with the class of functions represented by their angular boundary values in the convex domain  $D \subset \mathbb{C}$  have a smooth boundary  $\partial D$  by the Cauchy integral or, in short, by their Cauchy integral.

To do this, we give the following theorem:

**Theorem 1.**  $A(z)$ –analytic function  $f(z)$  belongs to class  $H_A^1$ , if and only if its angular boundary values  $f^*(\zeta)$  satisfy condition

$$\int_{\partial D} f^*(\zeta) \psi^k(\zeta, a) (d\zeta + A(\zeta) d\bar{\zeta}) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

From this, for functions  $f$  of the Hardy class  $H_A^1(D)$ , the Cauchy formula

$$f(z) = \int_{\partial D} f^*(\zeta) K(z, \zeta) (d\zeta + A(\zeta) d\bar{\zeta}), \quad z \in D$$

is valid.

## REFERENCES

1. Privalov I.I., Boundary properties of analytical functions, Moscow. Gostekhizdat, 1950, 337 p. (in Russian).
2. Aizenberg L.A., Carleman's Formulas in Complex Analysis, Springer Science+Business Media B.V., 299 p., 1993.
3. Koosis P., Introduction to  $H^p$ , Cambridge University Press, 1998, 287 p.

4. Sadullayev A. and Jabborov N.M. On a class of  $A$ -analytic functions. Journal Siberian Federal University. 2016. Vol. 9, No. 3, pp. 374–383.

## СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФЕРМИОНОВ В ПОДПРОСТРАНСТВЕ

*Ж.И. Абдуллаев<sup>1,2</sup>, А.М. Тоштурдиев<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан*

<sup>2</sup>*Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук  
Узбекистана, Самаркандский филиал, Самарканд 140104, Узбекистан*

*e-mail: [jabdullaev@mail.ru](mailto:jabdullaev@mail.ru), [atoshturdiyev@mail.ru](mailto:atoshturdiyev@mail.ru)*

Связанные состояния гамильтониана  $H$  системы двух одинаковых частиц на одномерной решетке изучались в работе [1], на двумерной решетке в работе [2-3]. Инвариантные подпространства и собственные значения оператора Шредингера  $H(\mathbf{k})$  системы двух фермионов на трехмерной решетке исследовались в работе [4].

Здесь мы изучаем связанные состояния гамильтониана  $H$  системы двух фермионов на трехмерной решетке  $\mathbb{Z}^3$ . Иными словами, мы изучаем дискретный спектр семейства операторов  $H(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3 = (-\pi; \pi]^3$ , соответствующие  $H$ . Оператор  $H(\mathbf{k})$  действует в гильбертовом пространстве  $L_2^0(\mathbb{T}^3) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^3): f(-\mathbf{p}) = -f(\mathbf{p})\}$  по формуле

$$H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V.$$

Невозмущенный оператор  $H_0(\mathbf{k})$  есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 6 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos p_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos p_2 - 2\cos\frac{k_3}{2}\cos p_3.$$

Оператор возмущения  $V$  является интегральным оператором в  $L_2^0(\mathbb{T}^3)$  с ядром

$$(2\pi)^{-3/2} v(\mathbf{q} - \mathbf{s}) = (2\pi)^{-3/2} (F\hat{v})(\mathbf{q} - \mathbf{s}),$$

и принадлежит классу операторов Гильберта-Шмидта  $\Sigma_2$ .

Относительно функции  $\hat{v}$  предполагается, что

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} u(\mathbf{n}), & \text{если } |n_1| + |n_2| \leq 1 \\ 0, & \text{если } |n_1| + |n_2| \geq 2 \end{cases}$$

где  $|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$ ,  $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  является убывающей функцией, которая удовлетворяет следующим условиям

$$u(1) > u(2) > \dots > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u(n) < \infty.$$

Пусть  $L_2^e(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\}$  – подпространство, состоящее из четных функций на  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ .

Известно, что пространство нечетных функций  $L_2^o(\mathbb{T}^3)$  можно представить в виде прямой суммы

$$L_2^o(\mathbb{T}^3) = L_1^- \oplus L_2^- \oplus L_3^- \oplus L_{123}^-.$$

Здесь подпространство  $L_\alpha^- (\alpha \in \{1, 2, 3\})$  состоит из элементов  $f \in L_2^o(\mathbb{T}^3)$ , которые нечетны по  $p_\alpha$ , четны по другим координатам.

Например,

$$L_3^- := L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L_2^o(\mathbb{T}), \quad L_{123}^- := L_2^o(\mathbb{T}) \otimes L_2^o(\mathbb{T}) \otimes L_2^o(\mathbb{T}).$$

**Лемма 1.** Подпространства  $L_1^-$ ,  $L_2^-$ ,  $L_3^-$  и  $L_{123}^-$  являются инвариантными относительно оператора  $H(\mathbf{k})$ .

Эта лемма доказывается аналогично Лемме 2 из [4].

Обозначим через  $H_3^-(\mathbf{k})$  сужение оператора  $H(\mathbf{k})$  в инвариантном подпространстве  $L_3^-$  т.е.  $H_3^-(\mathbf{k}) = H(\mathbf{k})|_{L_3^-}$ .

Сужение  $V_3^-$  оператора  $V$  в инвариантном подпространстве  $L_3^-$  действует по формуле:

$$(V_3^- f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} u(1) \sin p_3 \sin q_3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} u(n+1) [\sin n p_3 \sin n q_3 \cos p_1 \cos q_1 + \\ + \sin n p_3 \sin n q_3 \cos p_2 \cos q_2 + \sin(n+1)p_3 \sin(n+1)q_3] \} f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

Если третья координата  $k_3$  полного квазиимпульса  $\mathbf{k}$  равна  $\pi$ , то оператор  $H_3^-(k_1, k_2, \pi)$  имеет бесконечно много инвариантных подпространств

$$\mathfrak{R}_3^-(n) = L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L^o(n) \subset L_3^-, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $L^o(n)$ , одномерное подпространство, натянутое на вектор  $\psi_n^-(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin np$ .

**Лемма 2.** Пусть потенциал  $\hat{v}$  имеет вид (3). Тогда для любого  $n \in \mathbb{N}$  подпространство  $\mathfrak{R}_3^-(n)$  является инвариантным относительно  $H_3^-(k_1, k_2, \pi)$ .

Теперь мы с формулируем теорему, являющейся основным результатом данной работы.

**Теорема 1.** Для любого  $k_1 \in (-\pi, \pi]$ , оператор  $H_3^-(k_1, \pi, \pi)$  имеет бесконечно много собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Мы можем заключить, что оператор  $H_3^-(k_1, \pi, \pi)$  имеет бесконечно много собственных функций, лежащих в подпространстве  $L_3^-$ . При каждом  $n \in \mathbb{N}$  оператор  $H_3^-(k_1, \pi, \pi)$  имеет хотя бы одну собственную функцию, лежащую в  $\mathfrak{R}_3^-(n)$ .

### Использованные литературы

1. Ж.И. Абдуллаев. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика Россия, Москва, 2006 Т. 147, № 1. 36-47.
2. S. Lakaev, Sh. Kholmatov, Sh. Khamidov. Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: Exactly solvable case, Journal of Physics, A: Mathematical and Theoretical, 54 (17), 245201 (2021).
3. J.I. Abdullaev, K.D. Kuliyeu, and B.U. Mamirov. Infinity the number of bound states of a system of two fermions on a two-dimensional lattice, Uzbek mathematical journal. 3-15. (2016).
4. J.I. Abdullaev, A.M. Toshturdiyev. Invariant Subspaces of the Schrödinger Operator with a Finite Support Potential. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 3, pp. 1481–1490.
5. M. Reed and B. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics. Analysis of Operators, Academic Press (1978).

# ОБ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ КВАДРАТИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ

*Аноров О.У., Шамсиддинов Н.Б.*

*Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент,  
Узбекистан*

*Академический лицей ТГТУ имени И.А. Каримова, Ташкент, Узбекистан*

*E-mail: [anorovbidjon6@gmail.com](mailto:anorovbidjon6@gmail.com), [shamsiddinov1974nb@gmail.com](mailto:shamsiddinov1974nb@gmail.com)*

Пусть  $(E, F)$  измеримое пространство и  $S(E, F)$  множество всех вероятностных мер на  $(E, F)$ . Отображение  $V: S(E, F) \rightarrow S(E, F)$  называется квадратичным стохастическим оператором (к.с.о.), если для любой меры  $\lambda \in S(E, F)$ , её образ  $V\lambda$  определяется равенством

$$V\lambda(A) = \int_E \int_E P(x, y, A) d\lambda(x) d\lambda(y), \quad (1)$$

где  $A \in F$  и семейство переходных вероятностей  $\{P(x, y, A): x, y \in E, A \in F\}$  удовлетворяет условиям:

i) для любых  $x, y \in E$ ,  $P(x, y, \cdot) \in S(E, F)$ ;

ii) для любого  $A \in F$  функция  $P(x, y, A)$  измерима относительно переменных  $x, y$ ;

iii) для любых  $x, y \in E, A \in F, P(x, y, A) = P(y, x, A)$ .

К.с.о. (1) называется дискретным, если множество  $E$  конечно или счетно. К.с.о. (1) называется абсолютно непрерывным если для любой меры  $\lambda \in S(E, F)$  мера  $V\lambda$  абсолютно непрерывна относительно меры  $\lambda$ .

Если  $E$  конечно, в [1] доказано что к.с.о.  $V$  абсолютно непрерывно тогда и только тогда когда  $V$  вольтерровский оператор.

В этой работе мы рассмотрим случай когда  $E$  счетное множество.

Пусть  $E = N$ - множество положительных целых чисел. На этом множестве семейство переходных вероятностей  $\{P(i, j, \{k\}) \equiv P_{ij,k}: i, j, k \in N\}$  определяет абсолютно непрерывный к.с.о., если

$$P_{ij,k} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \notin \{i, j\} \\ \alpha, & \text{если } j = i + 1 \text{ и } k = i \\ \frac{1}{2}, & \text{если } |i - j| \geq 2 \text{ и } k \in \{i, j\} \end{cases} \quad (2)$$

Так как  $P_{ij,i} + P_{ij,j} = 1$ , из  $P_{i(i+1),i} = \alpha$  следует  $P_{i(i+1),i+1} = 1 - \alpha$ .

Для произвольного  $x = (x_1, x_2, \dots) \in S(N, F)$  если  $\alpha = 1$ , семейство (2) порождает к.с.о.

$$(Vx)_k = \begin{cases} x_1(1 + x_2) & \text{при } k = 1 \\ x_k(1 - x_{k-1} + x_{k+1}) & \text{при } k > 1 \end{cases} \quad (3)$$

и если  $\alpha = 0$ , семейство (2) порождает к.с.о.

$$(Vx)_k = \begin{cases} x_1(1 - x_2) & \text{при } k = 1 \\ x_k(1 + x_{k-1} - x_{k+1}) & \text{при } k > 1 \end{cases} \quad (4)$$

В этой работе мы изучим предельное поведение траекторий абсолютно непрерывных операторов (3) и (4).

Пуст  $n = 3$ . Тогда (3) следующим образом:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_2), \\ x'_2 = x_2(1 - x_1 + x_3), \\ x'_3 = x_3(1 - x_2). \end{cases} \quad (5)$$

Так как  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ,  $x_3 = 1 - x_1 - x_2$  будем исследовать следующее уравнение

$$\begin{cases} x_1 = x_1(1 + x_2), \\ x_2 = x_2(1 - x_1 + x_3), \\ x_3 = x_3(1 - x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = 0, \\ x_2 x_1 = x_2 x_3, \\ x_3 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_3 = 1, x_2 = 0 \text{ или}$$

$x_1 = x_3 = 0, x_2 = 1$  неподвижной точка для оператора (5).

**Теорема 1.** Для квадратичного стохастического оператора (6) справедлива следующие условия:

1.  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$  и  $(0; 0; 1)$  точки является неподвижной.

2. Множества  $S_1 = \{x \in S(N, F): x_1 + x_3 = 1, x_2 = 0\}$  является неподвижных точек оператора (6) и траектория с любой начальной точкой из  $S(N, F)$  сходится к точке из множества  $S_1$ .

**Доказательство.**

1. Если  $x = (1; 0; 0)$ , тогда оператор (6)

$$\begin{cases} x'_1 = 1 \cdot (1 + 0), \\ x'_2 = 0 \cdot (1 - 1 + 0), \\ x'_3 = 0 \cdot (1 - 0). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = 1, \\ x'_2 = 0, \\ x'_3 = 0. \end{cases}$$

Остальные аналогично.

2. Если  $x \in S_1 = \{x \in S(N, F): x_1 + x_3 = 1, x_2 = 0\}$ , тогда оператор (5) следующий вид:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + 0), \\ x'_2 = 0 \cdot (1 - x_1 + x_3), \\ x'_3 = x_3(1 - 0). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_1, \\ x'_2 = 0, \\ x'_3 = x_3. \end{cases}$$

**Теорема 2.** Для любых  $n$ , следующие точки множество

$$B_1 = \left\{x \mid \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i-1} = 1, \text{ и все остальные } x_{2i} = 0, i = \overline{1.. \lfloor n/2 \rfloor}\right\} \text{ или}$$

$$B_1 = \left\{x \mid \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_{2i} = 1, \text{ и все остальные } x_{2i-1} = 0, i = \overline{1.. \lfloor n/2 \rfloor}\right\} \text{ является}$$

неподвижной точкой для оператора (3).

**Литература:**

1. Ганиходжаев Н.Н., Сарымсаков Т.А. Аналитические методы в теории к.с.о.// ДАН СССР, 1989, Т.305, №5. 1052-1056
2. Sanikhodjaev N.N., Rozikov U.A. On quadratic stochastic operators generated by Gibbs distributions// Regular and Chaotic Dyn. V.I 1, №4, 2006 , 467-473.
3. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры.// Матем. Сб. 1992, Т.183, jV°8, 121-140
4. Н.Н.Ганиходжаев, О. У. Аноров. Об одном классе непрерывных квадратичных стохастических операторов. Uzbek Mathematical Journal, 2008, 2, 26-34.

5. Nasir Ganikhodjaev, Dmitriy V. Zanin (2004). On a necessary condition for the ergodicity of quadratic operators defined on the two-dimensional simplex. Russian Mathematical Surveys, 59 (3). , 0 pp. 571-572. ISSN 0036-0279 (P), 1468-4829 (O)

## **ЁМКОСТНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛУЗИНА О $C$ – СВОЙСТВЕ**

*Даужанов Аиназар Шынназарович*

*Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Каракалпакского государственного университета им.Бердаха, г. Нукус*

*E-mail: aynazard@mail.ru*

В данной работе дано обобщение теоремы А. Картана о свойствах непрерывности потенциала Рисса.

Библиогр: 11 наименов.

Из фундаментальной теоремы Лузина о  $C$  –свойстве следует, что всякая измеримая функция является непрерывной вне некоторого множества малой меры. Точнее, для любой измеримой на  $R^n$  функции  $u$  и любого  $\varepsilon > 0$  существуют такие функция  $v \in C(R^n)$  и открытое множество  $U_\varepsilon \subset R^n$ , для которых

$$u(x) = v(x), \quad x \in R^n \setminus U_\varepsilon, \quad m(U_\varepsilon) < \varepsilon \quad (m - \text{мера Лебега на } R^n).$$

Эти вопросы исследовали многие авторы, среди которых отметим следующих: Х.Уитни, А.Д.Александров, К.Гоффман, А.П.Кальдерон, А.Зыгмунд, Х.Федерер, Е.Э.Мовшович, Ф.Лиу, Ш.А.Алимов, Т.Бэгби, В.Зимер, Б.Боярский, П.Хайлаш, П.Стржелецкий, Дж.Майкл.

А.Садуллаев и Р.Мадрахимов (см. [4]), изучая гладкости более высокого порядка для субгармонических функций ввели понятие хаусдорфовый охват для оценки отбрасываемых множеств. Такие задачи для субгармонических и плюрисубгармонических функций были исследованы в серии работ [4-9], [11].

**Теорема 1.** (А. Картан [1-3]) Пусть  $U_\alpha^\mu(x)$  – произвольный потенциал. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует открытое множество  $U_\varepsilon \subset R^n$  с ёмкостью  $Cap_{n-\alpha}(U_\varepsilon) < \varepsilon$  такое, что потенциал  $U_\alpha^\mu(x)$  непрерывен на  $R^n \setminus U_\varepsilon$

**Определение.** Говорят, что функция  $u(x)$ , определенная на  $G$ , принадлежит классу  $Lip_\beta(G)$ ,  $\beta > 0$ , если существуют определенные на  $G$  функции  $u^{(j)}$ ,  $|j| < \beta$ , такие, что  $u^{(0)}(x) = u(x)$ ,

$$\left| u^{(j)}(x+h) - \sum_{|j+l| < \beta} \frac{u^{(j+l)}(x)}{l!} h^l \right| \leq M(h) |h|^{\beta-|j|}, \quad x, x+h \in G, |j| < \beta.$$

Здесь  $j = (j_1, \dots, j_n)$ ,  $l = (l_1, \dots, l_n)$  – мультииндексы,

$$|j| = j_1 + \dots + j_n, \quad l! = l_1! \dots l_n!, \quad h^l = h_1^{l_1} \dots h_n^{l_n}.$$

Заметим, что в случае  $G = R^n$  класс функции  $Lip_\beta(R^n)$  имеют простые дифференциальные свойства.

**Теорема 2.** ([5]) Пусть  $\beta: 0 < \beta \leq \alpha$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует открытое множество  $G_\varepsilon \subset R^n$  с хаусдорфовым охватом  $\hat{H}_{n-\alpha+\beta}(G_\varepsilon) < \varepsilon$  такое, что потенциал  $U_\alpha^\mu(x)$  принадлежит классу Липшица  $Lip_{\beta-0}$  на компактных подмножествах разности  $R^n \setminus G_\varepsilon$ . Здесь  $Lip_{\beta-0} = \bigcap_{\rho < \beta} Lip_\rho$ . Следует отметить, что

при  $\alpha = \beta$  хаусдорфов охват  $\hat{H}_{n-\alpha+\beta} = \hat{H}_n$  совпадает с мерой Лебега  $m$  на  $R^n$ .

Теорема 1 представляет собой ёмкостный аналог теоремы Лузина для субгармонических функций.

Мы будем рассматривать гладкость потенциала Рисса  $U_\alpha^\mu(x)$ :

$$U_\alpha^\mu(x) = \int_{R^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n.$$

Нашей целью является получение аналогичных результатов о непрерывности потенциалов. Во многом мы будем следовать идеям и методом работы [4].

**Теорема 3.** Пусть  $\beta: 0 < \beta < \alpha, \beta \notin N$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует открытое множество  $G_\varepsilon \subset R^n$  с хаусдорфовым охватом  $\hat{H}_{n-\alpha+\beta}(G_\varepsilon) < \varepsilon$  такое, что потенциал Рисса  $U_\alpha^\mu(x)$  принадлежит классу Липшица  $Lip_\beta$  на компактных подмножествах разности  $R^n \setminus G_\varepsilon$ .

Теорема 3 обобщает теорему 2.

Автор выражают глубокую благодарность А.Садуллаеву и С.А.Имомкулову за помощь и постоянное внимание за работу, часть которой была освещена в этой статье.

### Список литературы

1. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала.- М.: Наука, 1966.
2. Садуллаев А. Плюрисубгарионические функции// Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 1985, Т. 8, С.65-113.
3. Садуллаев А. Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества// Матем. сб., 1982, Т. 119 (161), №1. С. 96-118.
4. Садуллаев А., Мадрахимов Р.М. Гладкость субгармонических функций// Матем. сб., 1990, Т. 181, №2. С. 167-182.
5. Мадрахимов Р.М. О гладкости субгармонических функций// ДАН РУз., 1988, №2. С. 3-4.
6. Имомкулов С.А. Дважды дифференцируемость субгармонических функций// Изв. РАН. Сер матем. 1992. Т. 56, №4. С. 877-888.
7. Имомкулов С.А. О гладкости монотонных и выпуклых функций// ДАН РУз. 1995. № 9-10. С. 10-12.
8. Имомкулов С.А., Даужанов А.Ш. Дифференциальные свойства потенциалов

Рисса// Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.- Чернівці (Україна): Прут, 2005. - Вип. 12. С. 120-128.

9. Bedford E., Taylor V.A. A new capacity for plurisubharmonic functions// Acta Math. 1982. V. 149, №1-2. P. 1-40.

10. Алимов Ш.А. Дробная степень эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций// Диф.Урав. 1972. №8. С.1609-1626.

11. Даужанов А.Ш. О гладкости потенциала Рисса вне множества малой хаусдорфовой меры// Uzbek Mathematical Journal, 2012, №3, pp. 55-59.

## О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

<sup>1</sup>Икромов И.А., <sup>2</sup>Баракаев А.М

<sup>1</sup>Институт математики им. В.И. Романовского, Самарканд, Узбекистан,

<sup>2</sup>Самаркандский государственный Университет, Самарканд, Узбекистан,

e-mail: ikromov1@rambler.ru, azamat1\_9@mail.ru

Пусть  $S$  —гладкая гиперповерхность в  $R^{n+1}$  и  $d\mu = \psi d\sigma$ , где  $d\sigma$ -индуцированная Лебегова мера на  $S$  и  $\psi$  бесконечно-гладкая неотрицательная функция с компактным носителем в  $R^{n+1}$ (т.е.  $\psi \in C_0^\infty(R^{n+1})$ ). Через  $\delta_t$  обозначим обычную гомотетию заданную формулой  $\widehat{\delta_t h}(\xi) = \widehat{h}(t\xi)$ . Рассмотрим следующий максимальный оператор

$$Mf(x) = \sup_{t>0} \left| \int_S f(x - ty)\psi(y)d\sigma(y) \right|. \quad (1)$$

**Определение 1.** Говорят, что максимальный оператор  $M$  ограничен в  $L^p$ , если существует положительное число  $C_p$  такое, что для любой функции  $f \in C_0^\infty(R^{n+1})$ , выполняется неравенство:

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}, \quad (2)$$

где  $\|\cdot\|_{L^p}$  -естественная норма пространства  $L^p$ .

**Определение 2.** Функция  $\Phi(x)$  называется функцией конечного линейного типа по направлению единичного вектора  $\xi \in R^n$  в начале координат, если существует  $N \geq 2$  такое, что  $D_\xi^N \Phi(0) \neq 0$ , где  $D_\xi \Phi$  – производная функции  $\Phi$  по направлению вектора  $\xi$  в начале координат. Если  $\Phi$  имеет конечный линейный тип для каждого единичного  $\xi \in R^n$ , то говорят, что гиперповерхность  $S = \{x, \Phi(x)\}$  имеет конечный линейный тип в точке  $(0, \Phi(0))$  (см.[1]).

В работе [2] доказано что, если  $S$  выпуклая гиперповерхность конечного линейного типа и  $p \geq 2$ , то условие

$$d(x, H)^{-\frac{1}{p}} \in L^1_{loc}(S) \quad (3)$$

является необходимым и достаточном для ограниченности максимального оператора в  $L^p(R^{n+1})$ , т.е. удовлетворяют неравенству (2), где  $H$  -любая гиперповерхность не проходящая через начало координат и  $d(x, H)$ -расстояния от  $x \in S$  до  $H$ . В работе [3] доказано, что если  $S \subset R^3$  гладкая гиперповерхность, то при  $p > h(S) \geq 2$  (где  $h(S)$  высота гиперповерхности, введения в классической работе А.Н. Варченко[4]) то максимальный оператор ограничен. Из результатов С.Д. Согги [5] следует, что если в каждой точке гиперповерхности  $S$  хотя бы одна из главных кривизны отлично от нуля, то максимальный оператор ограничен в  $L^p$  при  $p > 2$ . Однако, вопрос об ограниченности максимального оператора при  $p = 2$  остается открытым.

Предположим, что в некоторой окрестности начала координат выпуклая поверхность  $S$  задана следующей формулой:

$$z := F(x, y) = x^2(1 + A(x) + B(y)) + \varphi(y) + C, \quad (4)$$

где  $C \neq 0$  некоторая константа и  $\varphi(y)$  есть выпуклая функция, и производные всех порядков обращаются в нуль в точке 0, то есть  $0 = \varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^n(0) = \dots$ . Далее обозначим через  $d(Y, H)$  – расстояние от точки  $Y :=$

$(x, y, z(x, y))$  поверхности до ее касательной плоскости  $H$ . Полученный результат мы сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Если  $S$  – выпуклая поверхность, заданной с формулой (4) и функция  $\varphi$  плоская в начала координат, то существует окрестность  $U$  точки  $(0; 0; C)$  такая, что следующие условия эквивалентны:

1. Максимальный оператор определенный с формулой (1) ограничен в пространстве  $L^2(R^3)$ ;

2. Справедливо следующее включение

$$d(x, H)^{-\frac{1}{2}} \in L^1_{loc}(S).$$

### Литература

1. Икромов И.А., Усманов С.Э. Об ограниченности максимальных операторов, связанных с гиперповерхностями, Современная математика. Фундаментальные направления, 64(4), 650--681(2018).

2. Iosevich~А., Sawyer~Е. Maximal Averages over surfaces//Adv. in Math.,--1997.--132.--46.--P.119--187.

3. Ikromov I. A., Kempe M., Müller D. Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in  $R^3$  and related problems of harmonic analysis// Acta Math.,--2010.--204.--P.151-271

4. Варченко А.Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов.//Функциональный анализ и его прил.,--1976.10, No3.--Стр.13--38.

5. Sogge, C. D., Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature, in Fourier Analysis and Partial Differential Equations (Miraflores de la Sierra, 1992), Stud. Adv. Math., pp. 317–323. CRC, Boca Raton, FL, --1995.

# ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОДНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

*Х.М. Латипов*

*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан*

*h.m.latipov@buxdu.uz*

Многие научно-прикладные проблемы приводятся к изучению спектральных свойств блочно-операторных матриц, элементы которых являются линейными операторами, действующими в банаховых или гильбертовых пространствах [1]. В настоящей заметки рассматривается операторная матрица четвертого порядка  $A_3$ , которая соответствует гамильтониану систему с несохраняющимся числом и не более четырех частиц на решетке. Она связана с моделью спин-бозон с не более чем тремя фотонами в евклидовом пространстве  $R^d$ , т.е. в бозонном фоковском пространстве над  $L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^2)$ , изученной в работе [2]. Описано местоположение существенного спектра оператора  $A_3$ , т.е. выделены двухчастичная, трехчастичная и четырехчастичная ветви существенного спектра оператора  $A_3$ . Установлено, что существенный спектр операторной матрицы  $A_3$  состоит из объединения отрезков, число которых не больше 14.

Пусть  $d \in \mathbb{N}$  и  $T^d := (-\pi; \pi]^d$  -  $d$ -мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней,  $L_2((T^d)^m)$ ,  $m = 1, 2, 3$  - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $(T^d)^m$  и

$$\mathcal{F}(L_2(T^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(T^d) \oplus L_2((T^d)^2) \oplus \dots;$$

$$\mathcal{F}^{(m)}(L_2(T^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(T^d) \oplus L_2((T^d)^2) \oplus \dots \oplus L_2((T^d)^m), \quad m = 1, 2, 3;$$

$$\mathcal{H}^{(m)} := \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}^{(m)}(L_2(T^d)), \quad m = 1, 2, 3.$$

Гильбертово пространство  $\mathcal{F}(L_2(T^d))$  называется пространством Фока, а  $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(T^d))$ -  $m + 1$ -частичное обрезанное подпространство пространства Фока.

В гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}^{(3)}$  рассмотрим тридиагональную операторную матрицу

$$A_3 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$A_{00}f_0^{(s)} = s\varepsilon f_0^{(s)}, \quad A_{01}f_1^{(s)} = \alpha \int_{T^d} v(t)f_1^{(-s)}(t)dt,$$

$$(A_{11}f_1^{(s)})(k_1) = (s\varepsilon + w(k_1))f_1^{(s)}(k_1), \quad (A_{12}f_2^{(s)})(k_1) = \alpha \int_{T^d} v(t)f_2^{(-s)}(k_1, t)dt,$$

$$(A_{22}f_2^{(s)})(k_1, k_2) = (s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2))f_2^{(s)}(k_1, k_2), \quad (A_{23}f_3^{(s)})(k_1, k_2) \\ = \alpha \int_{T^d} v(t)f_3^{(-s)}(k_1, k_2, t)dt,$$

$$(A_{33}f_3^{(s)})(k_1, k_2, k_3) = (s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3))f_3^{(s)}(k_1, k_2, k_3).$$

Здесь  $\{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, f_3^{(s)}, s = \pm\} \in \mathcal{H}^{(3)}$ ;  $A_{ij}^*$  сопряженный оператор к  $A_{ij}$ ,  $i < j$ , функции  $v(\cdot)$ ,  $w(\cdot)$  являются вещественнозначными и непрерывными на  $T^d$ , причем  $\min_{k \in T^d} w(k) = 0$ ,  $\alpha > 0$  – "параметр взаимодействия". В этих предположениях операторная матрица  $A_3$  является ограниченной и самосопряженной в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}^{(3)}$ .

С целью исследования спектральных свойств операторной матрицы  $A_3$ , определим два ограниченных самосопряженных оператора  $A_m$ ,  $m = 1, 2$ , действующих в  $\mathcal{H}^{(m)}$  в виде  $(m + 1) \times (m + 1)$  операторных матриц

$$A_1 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще следующие три ограниченных самосопряженных оператора  $A_m^{(s)}$ ,  $m = 1, 2, 3$ ,  $s = \pm$ , которые действуют в  $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(T^d))$  в виде  $(m+1) \times (m+1)$  операторных матриц

$$A_1^{(s)} := \begin{pmatrix} \hat{A}_{00}^{(s)} & \hat{A}_{01} \\ \hat{A}_{01}^* & \hat{A}_{11}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad A_2^{(s)} := \begin{pmatrix} \hat{A}_{00}^{(s)} & \hat{A}_{01} & 0 \\ \hat{A}_{01}^* & \hat{A}_{11}^{(s)} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{12}^* & \hat{A}_{22}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad A_3^{(s)} :=$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{A}_{00}^{(s)} & \hat{A}_{01} & 0 & 0 \\ \hat{A}_{01}^* & \hat{A}_{11}^{(s)} & \hat{A}_{12} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{12}^* & \hat{A}_{22}^{(s)} & \hat{A}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{23}^* & \hat{A}_{33}^{(s)} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\hat{A}_{00}^{(s)} f_0 = s\varepsilon f_0, \quad \hat{A}_{01} f_1 = \alpha \int_{T^d} v(t) f_1(t) dt,$$

$$(\hat{A}_{11}^{(s)} f_1)(k_1) = (-s\varepsilon + w(k_1)) f_1(k_1), \quad (\hat{A}_{12} f_2)(k_1) = \alpha \int_{T^d} v(t) f_2(k_1, t) dt,$$

$$(\hat{A}_{22}^{(s)} f_2)(k_1, k_2) = (s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2(k_1, k_2), \quad (\hat{A}_{23} f_3)(k_1, k_2)$$

$$= \alpha \int_{(T^d)^2} v(t) f_3(k_1, k_2, t) dt,$$

$$(\hat{A}_{33}^{(s)} f_3)(k_1, k_2, k_3) = (-s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3)) f_3(k_1, k_2, k_3),$$

$$(f_0, f_1) \in \mathcal{F}^{(1)}(L_2(T^d)), \quad (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{F}^{(2)}(L_2(T^d)), \quad (f_0, f_1, f_2, f_3)$$

$$\in \mathcal{F}^{(3)}(L_2(T^d)).$$

Установим связь между спектрами операторных матриц  $A_m$  и  $A_m^{(s)}$ ,  $s = \pm$ .

**Лемма 1.** Пусть  $m = 1, 2, 3$ . Между спектрами операторных матриц  $A_m$  и  $A_m^{(s)}$ ,  $s = \pm$  справедливо равенство  $\sigma(A_m) = \sigma(A_m^{(+)}) \cup \sigma(A_m^{(-)})$ . Кроме того,

$$\sigma_{\text{ess}}(A_m) = \sigma_{\text{ess}}(A_m^{(+)}) \cup \sigma_{\text{ess}}(A_m^{(-)}), \quad \sigma_p(A_m) = \sigma_p(A_m^{(+)}) \cup \sigma_p(A_m^{(-)}).$$

При  $m = 1, 2, 3$ . часть дискретного спектра  $\sigma_{\text{disc}}(A_m^{(s)})$  операторной матрицы  $A_m^{(s)}$  может лежать в существенном спектре  $\sigma_{\text{ess}}(A_m^{(-s)})$  операторной матрицы  $A_m^{(-s)}$ , поэтому имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{disc}}(A_m) &\subseteq \sigma_{\text{disc}}(A_m^{(+)}) \cup \sigma_{\text{disc}}(A_m^{(-)}), \\ \sigma_{\text{disc}}(A_m) &= \{\sigma_{\text{disc}}(A_m^{(+)}) \cup \sigma_{\text{disc}}(A_m^{(-)})\} \setminus \sigma_{\text{ess}}(A_m). \end{aligned}$$

Точнее,  $\sigma_{\text{disc}}(A_m) = \bigcup_{s=\pm} \{\sigma_{\text{disc}}(A_m^{(s)}) \setminus \sigma_{\text{ess}}(A_m^{(-s)})\}$ .

Обозначим  $\sigma_1^{(s)} := \bigcup_{k_1 \in T^d} \{w(k_1) + \sigma_{\text{disc}}(A_1^{(-s)})\}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_2^{(s)} &:= \bigcup_{k_1 \in T^d} \{w(k_1) + \sigma_{\text{disc}}(A_2^{(-s)})\} \cup \bigcup_{k_1 \in T^d} \{w(k_1) + \sigma_1^{(s)}\}, \\ \Sigma_2^{(s)} &:= \sigma_2^{(s)} \cup [s\varepsilon, s\varepsilon + 3M]. \end{aligned}$$

Местоположение существенного спектра оператора  $A_3$  описывается следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Существенный спектр оператора  $A_3$  совпадает с множеством  $\Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$ , т.е.  $\sigma_{\text{ess}}(A_3) = \Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$ . Более того, множество  $\sigma_{\text{ess}}(A_3)$  представляет собой объединение не более чем четырнадцати отрезков.*

Введем подмножества

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{two}}(A_3) &:= \bigcup_{k_1 \in T^d} \{w(k_1) + \sigma_{\text{disc}}(A_2^{(-s)})\} \cup \bigcup_{k_1 \in T^d} \{w(k_1) + \sigma_{\text{disc}}(A_2^{(s)})\}; \\ \sigma_{\text{three}}(A_3) &:= \bigcup_{k_1 \in T^d} \{w(k_1) + \sigma_1^{(-s)}\} \cup \bigcup_{k_1 \in T^d} \{w(k_1) + \sigma_1^{(s)}\}; \\ \sigma_{\text{four}}(A_3) &:= [-\varepsilon, -\varepsilon + 3M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 3M] \end{aligned}$$

существенного спектра операторной матрицы  $A_3$ .

Множестве  $\sigma_{\text{two}}(A_3)$ ,  $\sigma_{\text{three}}(A_3)$  и  $\sigma_{\text{four}}(A_3)$  называются двухчастичной, трехчастичной и четырехчастичной ветвями существенного спектра оператора  $A_3$ , соответственно.

## Литература

1. C.Tretter. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.
2. Ю.В.Жуков, Р.А.Минлос. Спектр и рассеяние в модели "спин-бозон" с не более чем тремя фотонами. Теор. и матем. физика, **103**:1 (1995), 63–81.

# УТОЧНЕНИЕ ЛЕММЫ ЛЕЛОНА О ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

*Мадрахимов Р.М., Омонов О.И.*

*Ташкентский государственный педагогический университет, Ташкент,  
Узбекистан*

*E-mail: [mruzimbay@mail.ru](mailto:mruzimbay@mail.ru), [o.i.omonov@mail.ru](mailto:o.i.omonov@mail.ru)*

Пусть  $C^n$  - комплексное пространство ( $n \geq 1$ ),  $B = \{z \in C^n : |z| < 1\}$  - открытый единичный шар в  $C^n$  с центром в начале координат, граница которого является сфера

$$S = \{z \in C^n : |z| = 1\}.$$

Пусть также  $D$  - фиксированная область в  $C^n$ . Хорошо известно что, функция  $f(z) \in C^2(D)$  называется плюригармонической в  $D$ , если она удовлетворяет следующим  $n^2$  - дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Гартогса и Лелона утверждает, что сепаратно-голоморфные или сепаратно-гармонические функции являются, соответственно, голоморфными или гармоническими функциями по совокупности переменных. Радиальный аналог основной теоремы Гартогса был доказан Ф.Форелли (1978) и Р.М.Мадрахимовым (1986).

В работе Ф.Форелли [2] доказана следующая теорема:

**Теорема.** Пусть  $B$  - открытый единичный шар в  $C^n$  и функция  $f(z) : B \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f(z) : B \rightarrow \mathbb{C}$ ) удовлетворяет следующим условиям:

1) если  $f \in \cap \{C^k(0) : k = 1, 2, \dots\}$ ;

2) для каждого фиксированного  $z \in B$  функция  $f(\lambda z)$  гармонична ( $f(\lambda z)$  голоморфна) в круге  $\{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda z \in B\}$ .

Тогда функция  $f(z)$  плюригармонична ( $f(z)$  голоморфна) в  $B$ .

Как известно, гармоническая и плюрисубгармоническая функция является плюригармонической (см.[1]).

**Результаты этой статьи следующие.**

**Теорема:** Пусть  $B$ -единичный шар в  $\mathbb{C}^n$  и функция  $f(z): B \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет следующим условиям:

- а) функция  $f(z)$   $\mathbb{R}$ -аналитична;
- б) сужение  $f(z)|_{l \cap B}$  субгармонично для всех комплексных прямых  $0 \in l$ .

Тогда функция  $f(z)$  является плюрисубгармонической в  $B$ .

**Следствие:** Если  $B$ -единичный шар в  $\mathbb{C}^n$  и функция  $f(z): B \rightarrow \mathbb{R}$  гармонична в  $B$ , а ее сужение  $f(z)|_{l \cap B}$  субгармонично на всех комплексных прямых  $0 \in l$ , то функция  $f(z)$  является плюригармонической в  $B$ .

### **Литература.**

1. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. – М. Наука, 1971. – 432 с.
2. Forelli F. Pluriharmonicity in terms of harmonic slices // Math.Scand. – 1977. V. 41. P. 358– 364.
3. Шабат Б.В. «Введение в комплексный анализ» Ч. 2. М. Наука. 1976
4. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из  $\mathbb{C}^n$ . // М. Мир. 1984.

# ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ ОДНОЙ ПОДРОДНЫХ НС МОДЕЛЕЙ

*Умирзакова Камола Орипжановна*

*Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан*

*e-mail: [kamola-0983@mail.ru](mailto:kamola-0983@mail.ru)*

В этом работе изучается одна из Hard-Core (НС) моделей с тремя состояниями. Известно, что существует четыре типа таких моделей: в одной из них точное число трансляционно-инвариантных мер Гиббса, найденных на дереве Кэли порядка  $k = 5$ .

Пусть  $\tau^k = (V, L)$  есть дерево Кэли порядка  $k \geq 1$ . Расстояние  $d(x, y)$ ,  $x, y \in V$  на дереве Кэли это количество ребер кратчайшей пути, соединяющей вершины  $x, y$ . Для фиксированного  $x^0 \in V$  обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, V_n = \bigcup_{j=0}^n W_j, L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Для  $x \in W_n$  обозначим  $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$ . Множество  $S(x)$  называется множеством прямых потомков вершины  $x$ .

Рассмотрим НС-модель ближайших соседей с тремя состояниями. В этой модели каждой вершине  $x$  ставится в соответствие одно из значений  $\sigma(x) \in \{0, 1, 2\}$ . Значения  $\sigma(x) \neq 0$  означают, что вершина  $x$  «занята», а значение  $\sigma(x) = 0$  означает, что вершина  $x$  «вакантна». Конфигурация  $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\}$  на дереве Кэли задается как функция из  $V$  в  $\Phi = \{0, 1, 2\}$ . Множество всех конфигураций на  $V$  обозначается через  $\Omega$ .

Рассмотрим множество  $\Phi$  как множество вершин некоторого графа  $G$ . Конфигурация  $\sigma$  называется  $G$ -допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в  $V_n$ ), если  $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$  – ребро графа  $G$  для любой ближайшей пары соседей  $x, y$  из  $V$  (из  $V_n$ ). Обозначим множество  $G$ -допустимых конфигураций через  $\Omega^a$  ( $\Omega_{V_n}^a$ ).

Множество активности [1] для графа  $G$  есть функция  $\lambda: G \rightarrow R_+$ . Значение  $\lambda_i$  функции  $\lambda$  в вершине  $i \in \{0,1,2\}$  называется ее “активностью”.

Для данных  $G$  и  $\lambda$  определим гамильтониан  $G$ -НС-модели как

$$H_G^\lambda(\sigma) = \sum_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, \quad \text{если } \sigma \in \Omega^a.$$

Понятие меры Гиббса вводится стандартным образом (см, например, [1]-[3]). Пусть  $L(G)$  – множество ребер графа  $G$ , обозначим через  $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$  матрицу смежности  $G$ , т.е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Известно [3], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин  $z = \{z_x, x \in G_k\}$ , удовлетворяющих

$$z'_{1,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11}z'_{1,y} + a_{12}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \quad z'_{2,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20} + a_{21}z'_{1,y} + a_{22}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}},$$

где  $z'_{i,x} = \lambda \frac{z_{i,x}}{z_{0,x}}$ ,  $i=1,2$ . Мы полагаем, что  $z_{0,x} \equiv 1$  и  $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0$ ,  $i=1,2$ .

Тогда для любых функций  $x \in V \mapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ , удовлетворяющих равенству

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y}}, \quad i=1,2 \quad (1)$$

существует единственная  $G$ -НС-мера Гиббса  $\mu$  и наоборот.

Рассмотрим трансляционно-инвариантные решения, в которых  $z_x = z \in R_+^2$ ,  $x \neq x_0$ . Мера Гиббса, соответствующая таким решениям, называется трансляцион-инвариантной мерой Гиббса (ТИМГ).

**Определение 1.** [1] Граф называется плодородным, если существует набор активности  $\lambda$  такой, что соответствующий гамильтониан имеет не менее двух трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

В работе [1] выделены четыре типа плодородных графов с вершинами 0,1,2. Рассмотрим один из них  $G = \text{петля}$ :  $\{0,0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,1\}, \{2,2\}$ . В этой работе мы рассмотрим случай  $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  и изучим соответствующие этому случаю ТИМГ.

В работе [4] известны следующие теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $k \geq 2$  и  $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \left( \frac{k+1}{k} \right)^k$ . Тогда для НС-модели в случае  $G = \text{петля}$  при  $\lambda \leq \lambda_{cr}$  существуют ровно одна ТИМГ, при  $\lambda > \lambda_{cr}$  существует не менее трех ТИМГ.

Доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $k = 5$  и  $\lambda_{cr}(5) = \frac{7776}{12500}$ . Тогда для НС-модели в случае  $G = \text{петля}$  при  $\lambda \leq \lambda_{cr}$  существуют ровно одна ТИМГ  $\mu_0$ , а при  $\lambda > \lambda_{cr}$  существует ровно три ТИМГ  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ .

### Список литературы

1. Brightwell G., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions. J. Combin. Theory Ser. B. – 1999. – 77, – P. 221–262.
2. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. – М.: Мир, 1992.
3. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific. – 2013.
4. Rozikov U.A., Khakimov R.M. Gibbs measures for the fertile three-state hard core models on a Cayley tree, Queueing Systems. 81(1),2015,p.49-69.
5. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для плодородных моделей “hard-core” с тремя состояниями на дереве Кэли. ТМФ, 2015, том 183(3), стр. 441-449.
6. Martin J. B., Rozikov U. A., Suhov Yu. M. A three state hard-core model on a Cayley tree. J. Nonlin. Math. Phys.-2005.-12, № 3. –P.432-448.

7. Rozikov U. A., Shoyusupov Sh. A. Fertile HC models with three states on a Cayley tree, Theor. Math. Phys., 156(3), 2008, p.1319-1330.

## УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

*Халхужаев. А.М.<sup>1</sup>, И.А. Хужамиеров И.А.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт математики имени В.И. Романовского, Самарканд, Узбекистан*

<sup>2</sup>*Самаркандский государственный университет, г. Самарканд, Узбекистан*

*e-mail: ahmad\_x@mail.ru<sup>1</sup>, xujamiyorov1990@mail.ru<sup>2</sup>*

В работе [1] изучен модельный оператор  $H_\gamma^{as}$ , связанный с трехчастичным дискретным оператором Шрёдингера на трехмерной кубической решетке с парными контактными притягивающими потенциалами, где в качестве двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера взято семейство моделей Фридрикса с параметрами  $h_\alpha(\mathbf{k})$ ,  $\alpha = 1, 2, \mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$ . Доказано существование критического значения  $\gamma^*$  параметра  $\gamma$ , что если двухчастичные подсистемы имеют резонанс с нулевой энергией и не имеют связанных состояний с отрицательной энергией, то  $H_\gamma^{as}$  имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра при  $\gamma > \gamma^* \approx 13.607$ , и отсутствует эффект Ефимова при  $\gamma < \gamma^*$ . Аналогичный результат сохраняется и для рассматриваемого нами оператора  $H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$ , т.е. при  $\gamma > \gamma^*$  и фиксированном

$$\mu = \mu_0 = (1 + \gamma) \left( \int_{\mathbb{T}^3} \frac{d\mathbf{p}}{\varepsilon(\mathbf{p})} \right)^{-1}$$

оператор  $H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$  имеет бесконечное число собственных значений, лежащих правее существенного спектра. «Двухчастичная ветвь» существенного спектра оператора  $H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$  сдвигается к  $+\infty$  с порядком  $\mu$  при  $\mu \rightarrow +\infty$  в результате которого бесконечное число собственных значений оператора "поглощаются"

существенным спектром. Поэтому возникает естественный вопрос: существуют ли собственные значения оператора  $H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$ , лежащие правее существенного спектра при достаточно больших  $\mu$ , и если существуют, то сколько? Доказывается, что существует критическое значение  $\gamma_0$  такое, что при  $\gamma > \gamma_0$  и достаточно больших  $\mu > 0$  оператор  $H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$  имеет единственное трехкратное собственное значение, лежащее правее существенного спектра.

Пусть  $\mathbb{T}^3$  — трехмерный тор,  $L_2^{as}[(\mathbb{T}^3)^2] \subset L_2[(\mathbb{T}^3)^2]$  — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на  $(\mathbb{T}^3)^2$  и антисимметричных относительно перестановки переменных. Соответствующий трехчастичный дискретный оператор Шрёдингера  $H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$  действует в  $L_2^{as}[(\mathbb{T}^3)^2]$  по формуле

$$H_{\mu}(\mathbf{K}) = H_0(\mathbf{K}) - \mu(V_1 + V_2),$$

где

$$(H_{0,\gamma}(\mathbf{K})f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{\mathbf{K},\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q})f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

$$E_{\mathbf{K},\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

$$(V_1 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s})d\mathbf{s}, \quad (V_2 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s}, \mathbf{q})d\mathbf{s},$$

Здесь  $\mu > 0$  — энергия взаимодействия двух отталкивающихся частиц (фермиона и другой частицы).

Пусть

$$\gamma_0 = \left( \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_1 d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})} \right)^{-1} \approx 4,7655.$$

Основные результаты статьи приводятся для случая  $\mathbf{K}=\boldsymbol{\pi}$  и состоит из следующих теорем:

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma \in (1, \gamma_0)$ . Тогда существует  $\mu_\gamma > 0$  такое, что для любого  $\mu > \mu_\gamma$  оператор  $H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$  не имеет собственных значений, лежащих правее существенного спектра.

**Теорема 2.** Пусть  $\gamma > \gamma_0$  Тогда существует  $\mu_\gamma > 0$  такое, что для любого  $\mu > \mu_\gamma$  оператор  $H_{\mu,\gamma}(\pi)$  имеет единственное трехкратное собственное значение, лежащее правее существенного спектра. Кроме того, соответствующие собственные функции принадлежат подпространству

$$L_2^{(as,o)} [(\mathbb{T}^3)^2] := \{f: L_2^{as} [(\mathbb{T}^3)^2]: f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -f(-\mathbf{p}, -\mathbf{q})\}.$$

### Литература

1. Dell'Antonio G. F., Muminov Z. I. and Shermatova Y. M On the number of eigenvalues of a model operator relate to a system of three particles on lattice J. Phys. A: Math. Theor. 2011. 44 p. 315302-27.
2. Абдуллаев. Ж.И., Халхужаев. А.М., Хужамиеров И.А. Условие существования собственного значения трехчастичного оператора Шредингера на решетке Изв.вузов.матем.,2023.№2, 3-25.

## О ДИНАМИКЕ ОДНОГО НЕВОЛЬТЕРРОВСКОГО КВАДРАТИЧНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

*Мамуров Бобохон Жураевич,*

*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,*

*bmaturov.51@mail.ru*

**Аннотация.** Изучена динамика одного невольтерровского квадратичного стохастического оператора.

**Ключевые слова:** симплекс, квадратичные стохастические операторы, неподвижные точки, регулярность.

Эволюцию популяции можно изучать с помощью динамической системы квадратичного стохастического оператора (см. например [1],[2]).

Пусть  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ . Множество

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n: x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

называется (n-1)-мерным симплексом. Каждый элемент  $x \in S^{n-1}$  является вероятностной мерой на E, и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической и т.п.) системы, состоящей из n элементов.

Определение 1. Отображение  $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$

$$V: x'_k = \sum_{i,j=1}^n p_{ij,k}, \quad x_i x_j \quad (1)$$

где

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n p_{ij,k} = 1 \quad (2)$$

называется квадратичным оператором.

Определение 2. Квадратичный оператор (1), (2) назовем строго невольтерровским, если  $p_{ij,k}=0$  при  $k \in \{i, j\}$ ,  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ .

В  $S^2$  рассмотрим следующий невольтерровский квадратичный стохастический оператор, который имеет вид:

$$V: \begin{cases} x'_1 = \left(\frac{1}{3} + \alpha\right) x_1^2 + \frac{1}{3} x_2^2 + \frac{1}{3} x_3^2 + \frac{1}{3} x_1 x_2, \\ x'_2 = \left(\frac{1}{3} - \alpha\right) x_1^2 + \frac{1}{3} x_2^2 + \frac{1}{3} x_3^2, \\ x'_3 = \frac{1}{3} x_1^2 + \frac{1}{3} x_2^2 + \frac{1}{3} x_3^2 + \frac{2}{3} x_1 x_2, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ .

Доказана следующая теорема.

Теорема. а) Оператор (3) имеет единственную неподвижную точку

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in S^2,$$

где

$$x_1^* = 1 - x_2^* - x_3^*, \quad x_2^* = \frac{3\alpha\sqrt{17} + \sqrt{216\alpha - 78 - 72\alpha\sqrt{17} + 34\sqrt{17}} - \sqrt{17} - 3\alpha - 5}{4(3\alpha - 2)}, \quad x_3^* = \frac{5 - \sqrt{17}}{4};$$

б) Оператор (3) не имеет периодических точек, кроме неподвижной;

в) Любая траектория оператора сходится к единственной фиксированной;

г) Оператор (3) является регулярным преобразованием.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике. Киев, 1968, 296 с.
2. Jamilov U.U. On a family of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators, Jour.Phys. Conf. Ser.697 (2016) 012013.

## II SHO‘BA: DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIK FIZIKA

### СЕКЦИЯ № 2: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

### SECTION No. 2: DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL PHYSICS

#### DETERMINATION OF THE KERNEL FOR A TIME FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION WITH INTEGRAL TYPE OVER-DETERMINING CONDITIONS

*Amrilloyeva K.S.*

*Master student of Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

*[kibriyo.amrilloyeva.98@mail.ru](mailto:kibriyo.amrilloyeva.98@mail.ru)*

Let  $T > 0$  be fixed number and  $D_T = \{(x, t): 0 < x < l, 0 \leq t \leq T\}$ .

Consider the inverse problem of determining of functions  $u(x, t), K(t)$  such that it satisfies the equation

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) + u_{xxt}(x, t) + \int_0^t K(t - \tau)u(x, \tau)d\tau + f(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in D_T$$

with initial and nonlocal boundary conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l) \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

and the additional condition

$$\int_0^l \omega(x)u(x, t)dx = h(t). \quad (4)$$

Where  $\partial_t^\alpha$  is the Caputo fractional derivative [1]-[3] of order  $\alpha \in (1, 2)$  in the time variable, defined by

$$\partial_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t \frac{v''(s)}{(t - s)^{\alpha-1}} ds.$$

and  $f(x, t), h(t), \varphi(x), \omega(x)$  are given functions of  $x \in (0, l)$  and  $t \in [0, T]$ .

**Theorem.** Let  $(\varphi(x), f(x, t) \in C^3[0, l]), \omega(x) \in C^2(0, l), h(t) \in C^2[0, T], \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, f(0, t) = f(l, t) = f''(0, t) = f''(l, t) = 0$  and  $h_0 = h(0) \neq 0$  be satisfied. Then the inverse problem has a unique solution  $\{u(x, t), K(t)\}$  for some small  $T^* \in [0, T]$ . Then there exists sufficiently small number  $T^* \in [0, T]$  that the solution to the problem (1) – (4) in the class of functions  $u(x, t) \in C^{2,\alpha}(D_{T^*}), K(t) \in C^1[0, T^*]$  exist and unique, where  $D_{T^*} = \{(x, t): x \in (0, l), t \in [0, T^*]\}$ .

## REFERENCES

1. Z. S. Aliev, Y. T. Mehraliev, An inverse boundary value problem for a second-order hyperbolic equation with nonclassical boundary conditions, Dokl. Math. 90(2014), No. 1, p. 513-517
2. E. I. Azizbayov, Y. T. Mehraliyev, Solvability of nonlocal inverse boundary value problem for a second-order parabolic equation with integral conditions, Electron. J. Differential Equations 2017, No. 125, pp. 1-14.
3. D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili, On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations (in Russian), Mat. Model. 12(2000), No. 1, 94 -103.

## ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN NOLOKAL MASALA HAQIDA

*Aslonov U.Sh.*

*Buxoro viloyat pedagoglarni yangi metodikalarga o'rgatish milliy markazi Aniq va tabiiy fanlar metodikasi kafedrasi katta o'qituvchisi, Buxoro, O'zbekiston*

Ushbu maqolada  $\Omega$  sohasida ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan

$$sgny|y|^m U_{xx} + sgnx|x|^m U_{yy} + c(x, y)U = 0, m = const > 0 \quad (1)$$

tenglama uchun nolokal masala o'rganilgan.  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ ,  $\Omega_1$  sohasi  $x > 0, y > 0$  chorakda joylashgan bo'lib, uchlari  $B(0,1)$  va  $A(1,0)$  nuqtalarda bo'lgan silliq  $G$  chiziq,  $Oy$  o'qining  $OB$  va  $Ox$  o'qining  $OA$  kesmasi,  $\Omega_2$  sohasi  $x > 0, y < 0$  chorakda joylashgan bo'lib,  $OA$  kesmasi,  $x + y = 0$  ( $OC$  ning tenglamasi) va  $x^p + (-y)^p = 1$  ( $CA$  ning tenglamasi),  $\Omega_3$  sohasi  $x < 0, y > 0$  chorakda joylashgan bo'lib,  $OB$  kesmasi,  $x + y = 0$  ( $OD$  ning tenglamasi) va  $(-x)^p + y^p = 1$  ( $DB$  ning tenglamasi) bilan chegaralangan, bunda  $2p = m + 2$ .

**Ta'rif:** (1) tenglamani qanoatlantiruvchi  $U(x, y) \in C[\bar{\Omega}] \cap C^2[\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3]$  funksiya tenglamaning regulyar yechimi deyiladi.

**Chegaraviy masala:** (1) tenglamani quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimini toping:

$$U|_G = \varphi(x, y), \quad (2)$$

$$D_{0x^{2p}}^{q_1} (x^{2p})^{q_2} U[\theta_1(x)] = \tau_1(x), 0 \leq x \leq p^{1/p}, \quad (3)$$

$$D_{0y^{2p}}^{q_1} (y^{2p})^{q_2} U[\theta_2(y)] = \tau_2(y), 0 \leq y \leq p^{1/p}, \quad (4)$$

bunda  $-D_{0x^{2p}}^{q_1}[\cdot]$  kasr tartibli differensial operator,  $\theta_1(x)$  va  $\theta_2(y)$  —  $C$  va  $D$  nuqtalarning koordinatalari.

Berilgan funksiyalar  $\varphi(x, y)$ ,  $\tau_1(x)$ ,  $\tau_2(y)$  hamda  $q_1$  va  $q_2$  larga aniq shartlar qo'yilib, nolokal masalani yagona yechimga ega bo'lishi isbotlangan.

Aytish joizki, [1-3] maqolalarda

$$sgny|y|^m U_{xx} + x^n U_{yy} = 0, \quad m, n = const > 0$$

tenglama uchun (2) – (4) masalaga o'xshash nolokal masala yechilgan. Unda masala qo'yilish sohasi boshqa bo'lib, noma'lumga nisbatan singulyar integral tenglama olinadi. Bundan tashqari, uni yechish usulida  $m$  va  $n$  ko'rsatkichlar bir-biriga teng bo'la olmaydi. Ushbu maqolada esa boshqa usul (Grin va Riman funksiyalari va soha boshqacha) qo'llaniladi. Noma'lum funksiyalarga nisbatan singulyar integral tenglamalar sistemasi olinadi.

## ADABIYOTLAR

1. Исломов Б.Б. Нелокальная задача с условиями Франкля для вырождающегося уравнения эллиптико-гиперболического типа со спектральным параметром. Математик физика ва замонавий анализнинг турдош масалалари республика илмий-амалий анжумани материаллари. 2015 йил, Бухоро, 185-187 бетлар.
2. Салахитдинов М.С., Исломов Б. О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения  $-(-y)^m U_{xx} + x^n U_{yy} - \lambda^2 x^n (-y)^m U = 0$ . Неклассические уравнения математической физики и задачи теории ветвления. Ташкент. Фан, 1988 г., с. 24-34.
3. Салахитдинов М.С., Исломов Б.И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Т.: «Мумтозсуз», 2009, 263 с.

**INVERSE PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION  
OF PARABOLIC TYPE WITH NONLOCAL INITIAL-BOUNDARY  
CONDITION**

*D.D. Atoev*

*Bukhara state university, Bukhara, Uzbekistan*

*e-mail: dilshod\_atoyev@mail.ru*

Let  $T > 0$  be fixed number and  $D_T = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ . Consider the inverse problem of determining of functions  $u(x, t), k(t)$  such that it satisfies the equation

$$u_t - u_{xx} = \int_0^t k(\tau) u(x, t - \tau) d\tau, \quad (x, t) \in D_T,$$

with the nonlocal initial condition

$$u(x, 0) + \delta u(x, T) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \delta = const,$$

the boundary conditions

$$u(0, t) = u(l, t), \quad \int_0^l u(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T],$$

and the additional condition

$$u(x_0, t) = h(t),$$

Here  $\delta \geq 0$  is given number,  $\varphi(x), h(t)$  are given functions of  $x \in [0, l]$  and  $t \in [0, T]$ .

**Definition 1.** The pair  $u(x, t), k(t)$  from the class  $C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T}) \times C[0, T]$  is said to be a classical solution of problem (1)-(4), if the functions  $u(x, t)$  and  $k(t)$  satisfy the following conditions:

- (1) The function  $u(x, t)$  and its derivatives  $u_t(x, t), u_{xx}(x, t)$  are continuous in the domain  $D_T$  ;
- (2) the function  $k(t)$  is continuous on the interval  $[0, T]$ ;
- (3) equation (1) and conditions (2)-(4) are satisfied in the classical (usual) sense.

In this work, the solvability of a nonlinear inverse problem for integro-differential heat equation with nonlocal conditions was studied. The inverse problem was considered for determining the kernel  $k(t)$  included in the equation (1.1) with integral observation (1.4) of the solution of this system with the initial and boundary conditions (1.2), (1.3). Conditions for given functions are obtained, under which the inverse problem have unique solutions for a sufficiently small time interval.

#### *References*

1. Z.S. Aliev , Y. T. Mehraliev, An inverse boundary value problem for a second-order hyperbolic equation with nonclassical boundary conditions, Dokl. Math. 90(2014), No. 1, 513-517. <https://doi.org/10.1134/S1064562414050135>; MR3408673; Zbl 06381296
2. A.M. Nakhushev, Equations of mathematical biology (in Russian), Moscow, Visshaya Shkola, 1995. Zbl 0991.35500
3. A.N. Kolmogorov , S. V. Fomin, "Elements of function theory and functional analysis", *Moscow: Nauka, 1972.(In Russian)*
4. A.N. Tikhonov , A.A. Samarsky, "Equations of Mathematical Physics.", *Moscow: Nauka, 1977.(In Russian)*

# ON THE INTEGRATION OF THE PERIODIC HUNTER–SAXTON EQUATION WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE

*B.A.Babajanov<sup>1,2</sup>, D.O.Atajonov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*

<sup>2</sup> *Khorezm branch of Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy, Urgench,  
Uzbekistan*

*e-mail: [a.murod@mail.ru](mailto:a.murod@mail.ru), [diwa\\_4848@mail.ru](mailto:diwa_4848@mail.ru)*

The Hunter-Saxton (HS) equation

$$u_{xxt} + uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} = 0$$

where  $u(x, t)$  is the function of spatial variable  $x$  and time variable  $t$ . It arises in two different physical contexts in two nonequivalent variational forms [1], [2]. The first is shown to describe the propagation of weakly nonlinear orientation waves in a massive nematic liquid crystal director field [1]-[3].

In this paper, we consider the periodic HS equation with a self-consistent source

$$u_{xxt} = -uu_{xxx} - 2u_x u_{xx} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) s(\pi, \lambda_k, t) \left[ q_x(x, t) \psi^2(x, \lambda_k, t) + 2q(x, t) (\psi^2(x, \lambda_k, t))' \right] \quad (1)$$

in the class of real-valued  $\pi$ -periodic on the spatial variable  $x$  function  $u = u(x, t)$  which satisfy the regularity of assumption

$$u \in C^3(t > 0) \cap C(t \geq 0) \quad (2)$$

with the initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad (3)$$

where  $q(x, t) = u_{xx}(x, t)$  is the given real-valued  $\pi$ -periodic function and  $\psi(x, \lambda_k, t)$  are the Floquet solution (normalized by the condition  $\psi(0, \lambda_k, t) = 1$ ) of the weighted Sturm - Liouville equation

$$y'' = \lambda q(x, t) y, \quad x \in R. \quad (4)$$

Here  $\lambda_k$  is zeros of the function  $\Delta^2(\lambda) - 4$ , where  $\Delta(\lambda) = c(\pi, \lambda, t) + s'(\pi, \lambda, t)$ . We denote by  $c(x, \lambda, t)$  and  $s(x, \lambda, t)$  the solutions of equation (4) satisfying the initial conditions  $c(0, \lambda, t) = 1$ ,  $c'(0, \lambda, t) = 0$  and  $s(0, \lambda, t) = 0$ ,  $s'(0, \lambda, t) = 1$  respectively. In system (1), the functions  $\alpha_k(t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , can be chosen freely within the class of real-valued continuous functions having uniform asymptotic decay  $\alpha_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ ,  $k \rightarrow +\infty$ , thus providing uniform convergence of the series in equation (1).

The aim of this work is to provide a procedure for constructing the solution  $u(x, t)$ ,  $\psi(x, \lambda_k, t)$  of problem (1)-(3) using the inverse spectral theory for the weighted Sturm-Liouville equation (4).

For the sake of completeness, in this section, we summarize some facts from the inverse spectral theory of the weighted Sturm-Liouville equation (4). (see [4], [5], [6]).

The spectrum of the weighted Sturm-Liouville operator (4) is absolutely continuous and coincides with the set

$$E = \{\lambda \in \mathbb{R} : -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = [\lambda_0, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \lambda_3] \cup \dots \cup [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}] \dots$$

The intervals  $(-\infty, \lambda_0)$ ,  $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ ,  $n \geq 1$  are called the gaps or lacunas.

The numbers  $\xi_n$ ,  $n \geq 1$  with the signs  $\sigma_n = \text{sign}\{s'(\pi, \xi_n) - c(\pi, \xi_n)\}$ ,  $n \geq 1$  are called the spectral parameters of the weighted Sturm--Liouville equation (4).

The main result of the paper is stated in the theorem below.

**Theorem 1.** Let  $u(x, t)$  and  $\psi(x, \lambda_k, t)$  be solution of the problem (1)-(3). Then the spectrum of the problem (4) does not depend on  $t$ , and the spectral parameters  $\xi_n = \xi_n(t)$ ,  $\sigma_n = \sigma_n(t)$ ,  $n \geq 1$  satisfy the analogue of the system of Dubrovin equations

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2\xi_n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_k} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_n \alpha_k(t) s(\pi, \lambda_k, t)}{\xi_n - \lambda_k} \right\} h_n,$$

where

$$h_n(\xi) = -\frac{\sigma_n \xi_n \sqrt{\left(1 - \frac{\xi}{\lambda_0}\right) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi}{\lambda_{2i-1}}\right) \left(1 - \frac{\xi}{\lambda_{2i}}\right)}}{\prod_{j=1, j \neq n}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_j}\right)}$$

The  $\text{sign} \sigma_n(t) = \pm 1$  changes at each collision of the point  $\xi_n(t)$  with the boundaries of its gap  $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ . Moreover, the following initial conditions are fulfilled:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, n \geq 1,$$

where  $\xi_n^0, \sigma_n^0, n \geq 1$  are the spectral parameters of the weighted Sturm--Liouville equations (4) corresponding to the coefficients  $q_0(x) = u_{xx}(x, 0)$ .

### References

1. J.K. Hunter, R. Saxton, Dynamics of director fields, SIAM J. Appl. Math. 51 (1991), 1498–1521.
2. J.K. Hunter, Y.X. Zheng, On a completely integrable nonlinear hyper-bolic variational equation, Physica D. 79 (1994) 361–386.
3. J.K. Hunter, Y.X. Zheng, On a nonlinear hyperbolic variational equation: I, global existence of weak solutions, Arch. Ration. Mech. Anal. 129 (1995) 305-353.
4. R. Camassa and D. Holm, “An integrable shallow water equation with peaked solitons,” Phys. Rev. Lett. 71, 1661–1664 (1993).
5. R. Johnson, “Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves,” J. Fluid Mech. 455, 63–82 (2002).
6. A. Constantin, “A general-weighted Sturm-Liouville problem,” Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 24, 767–782 (1997).

**O'ZGARUVCHAN KOEFFITSIYENTLI YUKLANGAN ISSIQLIK  
TARQALISH INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMASI UCHUN  
QO'YILGAN TO'G'RI MASALA YECHIMINING MAVJUDLIGI VA  
YAGONALIGI**

*U.I.Baltayeva<sup>1,2</sup>, B.M.Xasanov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Khorazm Mamun akademiyasi, Urganch, O'zbekiston*

<sup>2</sup>*Urganch davlat universiteti, Urganch, O'zbekiston*

*[umida\\_baltayeva@mail.ru](mailto:umida_baltayeva@mail.ru), [xasanovboburjon.1993@gmail.com](mailto:xasanovboburjon.1993@gmail.com)*

**Koshi masalasi:**  $(x, y, t) \in R_T^2$  sohada quyidagi

$$u_t - a(t)(u_{xx} + u_{yy}) = \lambda D_{0,t}^{-\alpha} u(0, y, t) + \int_0^t k(x, 0, \tau) u(x, y, t - \tau) d\tau, (x, y, t) \in R_T^2, \quad (1)$$

yuklangan integro-differensial tenglamani va

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in R^2, \quad (2)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi  $u(x, y, t)$  funksiyani aniqlang,

bunda

$$\varphi(x, y) \in H^{l+2}(R^2), \varphi(x, y) \leq \varphi_0 = \text{const} > 0, \quad l \in (0, 1), \lambda \in R, \quad (3)$$

$$a(t) \in E := \{a(t) \in C^1[0, T], 0 < a_0 < a(t) \leq a_1 < \infty\}, \quad (4)$$

berilgan funksiyalar bo'lib,  $D_{0,t}^{-\alpha}$  kasr tartibli integral operator bo'lib,  $\alpha > 0$  da quyidagi ko'rinishda ifodalanadi

$$D_{0,t}^{-\alpha} u(0, y, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} u(0, y, \tau) d\tau,$$

bu yerda  $\Gamma(\alpha)$ -Gamma funksiya.

(1) va (2) Koshi masalasini yechish uchun, dastlab uch o'lchovli fazoda bir jinsli bo'lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimidan foydalanamiz.

Ya'ni, [1] ishda (1.1) formuladan foydalanib, (1), (2) Koshi masalasini quyidagi ikkinchi tur yuklangan Volterra tipidagi integral tenglamasi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta) G(x - \xi, y - \eta, \theta(t)) d\xi d\eta + \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\theta^{-1}(\tau)} k(\xi, \alpha) u(\xi, \eta, \theta^{-1}(\tau) - \alpha) G(x - \xi, y - \eta, \theta(t) - \tau) d\alpha d\xi d\eta + \\
 & + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\theta^{-1}(\tau)} (\theta^{-1}(\tau) - \beta)^{\alpha-1} u(0, \eta, \beta) G(x - \xi, y - \eta, \theta(t) - \tau) d\beta d\xi d\eta
 \end{aligned} \quad (5)$$

Xosil bo'lgan (5) integral tenglamaning yechimining mavjudligini va yagonaligini ketma-ket yaqinlashi usulidan foydalanib isbotlaymiz.

Natijada quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

**Teorema.** Agar (3) va (4) shartlar bajarilsa, u holda (5) yuklangan integral tenglamaning  $H^{l+2, (l+2)/2} \in (R_T^2)$  sinfga tegishli yagona  $u(x, y, t)$  yechimi mavjud.

#### *Adabiyotlar*

1. Durdiev D. K., Nuriddinov J. Z., On investigation of the inverse problem for a parabolic integro-differential equation with a variable coefficient of thermal conductivity, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2020, том 30, выпуск 4, 572–584.
2. Baltaeva U.I., Xasanov B.M., The direct problem for the loaded heat dissipation equation with a variable coefficient, *Journal of "Илм арчашмалари"*, №4. 2022, p.3-7

## KO'P O'LCHAMLI KASR TO'LQIN TENGLASINING FUNDAMENTAL YECHIMINI FOKS FUNKSIYASI ORQALI YOZISH

*S.B. Baxromova*

*Jizzax davlat pedagogika universiteti, Jizzax, O'zbekiston*

Ushbu ishda biz kasr tartibli diffuziya-to'lqin tenglamasi [1]

$$\partial_t^\alpha u - \Delta u = f(x, t), \quad t > 0, x \in R^n \quad (1)$$

uchun

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} (u, \nabla u)(x, t) = 0, \quad t > 0, x \in R^n, \quad (2)$$

Koshi masalasini qaraymiz, bu yerda  $1 < \alpha < 2$ ,  $\partial_t^\alpha$  – Kaputo ma’nosidagi kasr hosila va  $u$  quyidagi tenglik yordamida aniqlanadi:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{1-\alpha} u_{ss}(x, s) ds.$$

(1), (2) masalaning yechimi

$$u(x, t) = \int_{R^n} Z_1(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi + \int_{R^n} Z_2(x - \xi, t) \psi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{R^n} Y(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (3)$$

ko'rinishida bo'lib, bu yerda

$$Z_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi|x|}} H_{1,2}^{2,0} \left[ \frac{|x|^2}{4t^\alpha} \left| \begin{matrix} (1, \alpha) \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1,1) \end{matrix} \right. \right];$$

$$Z_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi|x|}} H_{1,2}^{2,0} \left[ \frac{|x|^2}{4t^{2-\alpha}} \left| \begin{matrix} (2, \alpha) \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1,1) \end{matrix} \right. \right];$$

$$Y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi|x|}} H_{1,2}^{2,0} \left[ \frac{|x|^2}{4t^{\alpha-2}} \left| \begin{matrix} (\alpha, \alpha) \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1,1) \end{matrix} \right. \right]$$

va  $H_{p,q}^{m,n}(z)$ -Foks funksiyasi. (3) yechimni olishda biz integral almashtirishlar va Rayt funksiyasining  $H$  –funksiyasi orqali yozilishidan foydalandik.

#### *Foydalanilgan adabiyotlar*

1. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. Theory and Application of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies (Elsevier, Amsterdam, 2006).

# NUMERICAL RESOLUTION OF UNSTEADY FOKKER-PLANCK TYPE KINETIC EQUATION

*Boltayeva G.<sup>1</sup>, Kurbonova K.<sup>2</sup>, Kodirova D.<sup>3</sup>*

*Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*

*[boltayevagozal334@gmail.com](mailto:boltayevagozal334@gmail.com)*

The Fokker-Planck equation is often used to approximate the description of particle transport processes with highly forward-peaked scattering. Pomraning has shown that if the physical scattering kernel is sufficiently dominated by small-angle scattering, then the Fokker-Planck equation is an asymptotic approximation to the linear Boltzmann transport equation (BTE).

From practical point of view, it is important to consider a problem for the time dependent FPE whose solution is used to compute the absorbed dose of radiation. The problem is given as follows:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \alpha \psi - \sigma \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right] = W, \text{ for } (t, \mu, z) \in Q \quad (1)$$

$$\psi_{\{t=T_{ini}\}} = \hat{\psi}(t, \mu, z), \quad (2)$$

$$\psi(t, \mu, Z_{ini}) = f(\mu, t), \text{ for } \mu \in (0, 1] \quad (3)$$

$$\psi(t, \mu, Z_{fin}) = g(\mu, t), \text{ for } \mu \in [-1, 0), \quad (4)$$

where  $Q = [T_{ini}, T_{fin}] \times [-1, 1] \times [Z_{ini}, Z_{fin}]$ .

For solving the problem (1)-(4), first of all, we rewrite it in the following form:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \mu, z) = \Phi(t, \mu, z, \psi) \quad (5)$$

$$\psi_{\{t=T_{ini}\}} = \hat{\psi}(\mu, z), \quad (6)$$

where  $\Phi(t, \mu, z, \psi) = cW - c\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} - c\alpha \psi + c\sigma \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right]$ . Since the problem

above is an initial value problem, one can employ explicit or implicit Euler method in

order to get a discretization with respect to time variable. The solution allows to compute the angular flux density of particles for each time fixed. We can easily compute  $\psi(t, \mu, z)$  for fixed value of  $t$  since we have already computed the solution of steady FPE when angular flux density of particles depends on only  $\mu, z$  with a direct and iterative methods in [1, 2]. Numerical solution of similar problem can be seen in [3]

#### *Reference*

1. L'opez Pouso, Oscar and Jumaniyazov, Nizomjon. Numerical experiments with the Fokker-Planck equation in 1D slab geometry//Journal of Computational and Theoretical Transport. 2016. 45, № 3 pp. 184-201.
2. L'opez Pouso, Oscar and Jumaniyazov, Nizomjon. Direct versus iterative methods for forward - backward diffusion equations. Numerical comparisons on a particular transport kinetic model//SeMA Journal. 2021. 78, pp. 271-286.
3. L'opez Pouso, Oscar and Jumaniyazov, Nizomjon. Numerical solution of the azimuth-dependent Fokker-Planck equation in 1D slab geometry//Journal of Computational and Theoretical Transport. 2021. pp. 102-133.

## **IKKINCHI TARTIBLI INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN BIR TESKARI MASALA HAQIDA**

*Bozorova M.M., Omonova D.D.*

*Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston*

*[madinaxonbozorova225@gmail.com](mailto:madinaxonbozorova225@gmail.com), [dinoraomonova707@gmail.com](mailto:dinoraomonova707@gmail.com)*

So'nggi vaqtlarda noma'lum manbali differensial tenglamalar bilan shug'illanishga bo'lgan qiziqish ortib bormoqda. Bunga sabab ko'plab issiqlik taqalish va diffuziya jarayonlarini matematik modelini tuzish noma'lum manbali differensial tenglama uchun qo'yiladigan masalalarga keltiriladi. Shu sababdan biz

ushbu ishda ikkinchi tartibli integro-differensial tenglama uchun bir teskari masalani tadqiq etamiz.

(0, 1) oraliqda ushbu

$$y''(x) - \lambda I_{0x}^{\gamma} y(x) = kf(x) \quad (1)$$

ikkinchi tartibli integro-differensial tenglamani qaraylik, bu yerda  $y(x)$ -noma'lum funksiya,  $\lambda, \gamma$ -o'zgarmas haqiqiy sonlar,  $f(x)$ -berilgan funksiya,  $k$ -noma'lum sonlar bo'lib,  $I_{0x}^{\gamma} y(x)$  - Riman-Liuvill ma'nosida kasr tartibli integral [1]

$$I_{0x}^{\gamma} y(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x (x-t)^{\gamma-1} y(t) dt.$$

**T<sub>1</sub> masala** Shunday  $y(x)$ -funksiya va  $k$  sonni topilsinki u quyidagi xossalarga ega bo'lsin:

- 1) (0, 1) oraliqda (1) tenglamani qanoatlantirsin;
- 2)  $C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$  sinfga tegishli bo'lsin;
- 3)  $x=0$  nuqtada esa

$$y(0) = A_1, \quad y'(0) = A_2 \quad (2)$$

$$B = \int_0^1 y(x) dx \quad (3)$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda  $A_1, A_2, B$  - berilgan o'zgarmas haqiqiy sonlar.

(1) tenglamani (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini

$$y(x) = A_1 E_{\beta,1}(\lambda x^{\beta}) + A_2 x E_{\beta,2}(\lambda x^{\beta}) + k \int_0^x (x-z) E_{\beta,4}[\lambda(x-z)^{\beta}] f(z) dz \quad (4)$$

yoziq olamiz [2], bu yerda  $E_{\xi,\eta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\xi n + \eta)}$  - Mittag -Leffler funksiyasi [1],

$$\beta = \gamma + 1.$$

(4) ni (3) shartga qo'yib, ba'zi hisoblashlarni amalga oshirib  $k$  sonini

$$k = \frac{B - A_1 E_{\beta,2}(\lambda) - A_2 E_{\beta,3}(\lambda)}{\int_0^1 (1-z)^2 E_{\beta,3}[\lambda(1-z)^\beta] f(z) dz} \quad (5)$$

ko‘rinishda topamiz.

(5) formulani (4) formulga qo‘yib (1), (2) masalaning yechimini

$$y(x) = A_1 E_{\beta,1}(\lambda x^\beta) + A_2 x E_{\beta,2}(\lambda x^\beta) + \left[ \int_0^1 (1-z)^2 E_{\beta,3}[\lambda(1-z)^\beta] f(z) dz \right]^{-1} [B - A_1 E_{\beta,2}(\lambda) - A_2 E_{\beta,3}(\lambda)] \times \int_0^x (x-z) E_{\beta,4}[\lambda(x-z)^\beta] f(z) dz \quad (6)$$

ko‘rinishda topamiz.

**1-teorema.** Agar  $\int_0^1 (1-z)^2 E_{\beta,3}[\lambda(1-z)^\beta] f(z) dz \neq 0$  bo‘lsa, u holda  $T_1$  masala yagona yechimga ega bo‘ladi va u (5), (6) formulalar bilan aniqlanadi.

*Foydalanilgan adabiyotlar.*

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations (North-Holland Mathematics Studies, 204). Amsterdam: Elsevier, 2006. - 523 p.
2. Bozorova M.M. Ikkinchi tartibli integro-differensial tenglama uchun to‘g‘ri va teskari masalalar // “O‘zbekiston fanlararo innovatsiyalar va ilmiy tadqiqotlar” respublika ilmiy jurnali. 2023. 18 - son. 355-360 betlar.

## KERNEL DETERMINATION INVERSE PROBLEM IN THE MOORE-GIBSON-THOMPSON EQUATION

*D.K. Durdiev<sup>1,a</sup>, A.A. Boltayev<sup>1,b</sup>*

<sup>1)</sup> *Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan,*

<sup>a)</sup> *d.durdiev@mathinst.uz,* <sup>b)</sup> *asliddinboltayev@mail.ru*

We consider the one-dimensional Moore-Gibson-Thompson equation [1]:

$$u_{ttt} + u_{tt} - u_{xxt} - u_{xx} + \int_0^t g(t-s)u_{xx}(x,s)ds = 0, \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

with initial

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad u_{tt}(x, 0) = \varphi_3(x), \quad x \in [0,1], \quad (2)$$

and boundary conditions

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

where,  $T$  is arbitrary positive number and  $D_T := \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ .

The problem of determining a function  $u(x; t) \in C_{x,t}^{2,3}(D_T)$  that satisfies (1)-(3) with known functions  $\varphi_i(x), i = \overline{1,3}$  and  $g(t)$  will be called the **direct problem** [2].

In the **inverse problem** [3], it is required to determine the function  $g(t)$  using overdetermination conditions about the solution of the direct problem (1)-(3):

$$u(x_0, t) = h(t), \quad x_0 \in (0,1), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

In this work, inverse problem was considered for determining the kernel  $g(t)$  included in the equation (1) with by using additional condition (4) of the solution of problem with the initial and boundary conditions (2), (3). Sufficient conditions for given functions are obtained, under which the inverse problem has unique solutions for a sufficiently small interval.

#### *REFERENCES*

1. B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, R. Marchand, Well-posedness and exponential decay rates for the Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound, *Control and Cybernetics*, (2011), V. 40, pp. 971988.
2. V.G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics*, Utrecht, The Netherlands, (1987).
3. S. Liu, and R. Triggiani, An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, (2013), V.21, pp. 825869.

# GLOBAL SOLVABILITY OF INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR ONE FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION WITH INITIAL NON-LOCAL AND INTEGRAL OVERDETERMINATION CONDITIONS

*D.K. Durdiev, A.A. Rahmonov*

*durdiev65@mail.ru , araxmonov@mail.ru*

In this work, we consider an inverse problem of determining the coefficient at the lower term of a fractional diffusion equation. The direct problem is the initial-boundary problem for this equation with non-local initial and homogeneous Dirichlet conditions. To determine the unknown coefficient, an overdetermination condition of the integral form is specified for the solution of the direct problem. Using the Green's function for an ordinary fractional differential equation with a non-local boundary condition and the Fourier method, the inverse problem is reduced to an equivalent problem. Further by using the fixed point argument in suitable Sobolev spaces, the global theorems of existence and uniqueness for the solution of the inverse problem are obtained.

## INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR FRACTIONAL WAVE EQUATION WITH RIEMANN LIOUVILLE DERIVATIVE

*Durdiyev Durdimurod Qalandarovich<sup>1</sup>, Turdiyev Halim Hamroyevich<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy,*

*Bukhara, Uzbekistan*

<sup>2</sup>*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

*<sup>1</sup>d.durdiev@mathinst.uz, <sup>2</sup>hturdiev@mail.ru*

In the domain  $\Omega_T := \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  consider the time-fractional diffusion wave equation

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x, t) - u_{xx} + q(t)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T \quad (1)$$

with initial and boundary conditions

$$(D_{0+,t}^{\alpha-1} u)_{t=0+} = \varphi(x), \quad (D_{0+,t}^{\alpha-2} u)_{t=0+} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

where  $\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha$  is the Riemann-Liouville fractional derivative of order  $1 < \alpha < 2$  in the time variable (see definition 1, 2 in [1]-[6]) and  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $f(x, t)$  are given smooth functions.

We pose the *inverse problem* as follows: find the function  $q(t)$ ,  $t > 0$  in (1), if the solution of the initial-boundary problem (1)-(3) satisfies condition:

$$\int_0^l w(x)u(x, t)dx = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$g(t)$  is a given function.

The functions  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $f(x, t)$  satisfy the following assumptions

A1)  $\{\varphi, \psi\} \in C^3[0, l]$ ,  $\{\varphi^{(4)}, \psi^{(4)}\} \in L_2[0, l]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ,  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ ,  $\psi''(0) = \psi''(l) = 0$ ;

A2)  $f(x, \cdot) \in C[0, T]$  and for  $t \in [0, T]$ ,  $f(\cdot, t) \in C^3[0, l]$ ,  $f^{(4)}(\cdot, t) \in L_2[0, l]$ ,  $f(0, t) = f(l, t) = 0$ ,  $f_{xx}(0, t) = f_{xx}(l, t) = 0$ ;

A3)  $w(x) \in C^2[0, T]$  and  $w(0) = w(l) = 0$  and  $w''(0) = w''(l) = 0$ ;

A4)  $\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha g(t) \in C[0, T]$  and  $|g(t)| \geq g_0 > 0$ ,  $g_0$  is a given number,  
 $\int_0^l w(x)\varphi(x)dx = (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha-1}g(t))_{t=0+}$ ,  $\int_0^l w(x)\psi(x)dx = (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha-2}g(t))_{t=0+}$ .

We obtain the following assertion.

**Theorem.** Let A1)-A4) are satisfied. Then there exists a number  $T^* \in (0, T)$ , such that there exists a unique solution  $q(t) \in C[0, T^*]$  of the inverse problem (1)-(4).

#### REFERENCES

1. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. "Theory and Applications of Fractional Differential Equations". Elsevier, Amsterdam-Tokyo, (2006).
2. Hilfer R., Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore (2000).

3. Sorrentinos G. "Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behavior of polymeric beams". in Proceedings of IMAS, Saint Louis, Mo, USA. 2006.
4. Kilbas,A.A., Bonilla,B., and Trujillo,J.J., "Existence and uniqueness theorems for nonlinear fractional differential equations". Demonstr.Math.,33(2.3),(2000)583-602.
5. Samko,S.G., Kilbas,A.A., Marichev,O.I., "Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications". New York and London,Gordon and Breach Science Publishers(1993).
6. Kilbas A.A., Trujillo J.J., "Differential equations of fractional order: methods, results and problems - I". Appl. Anal., 78 (2001), No.3-4, 153-192.

## AN INVERSE PROBLEM OF 1D PSEUDOPARABOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

*Elmuradova H.B.*

*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

*[h.b.elmurodova@buxdu.uz](mailto:h.b.elmurodova@buxdu.uz), [helmuradova@mail.ru](mailto:helmuradova@mail.ru)*

In this thesis, we consider a well-posed problem for a pseudoparabolic equation. It is proved that there is a unique global solution to the direct problem and estimates of its stability are obtained [1].

Let  $\mathbb{I}_{IT} = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  be a rectangle domain. In this present paper, we consider the following inverse problems of determining a pair of functions  $\{u(x, t), k(t)\}$ , which satisfy the non-linear 1D pseudoparabolic equation

$$u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = \int_0^t k(t - \tau)[u_{xxt} + u_{xx}](x, \tau)d\tau \text{ in } \mathbb{I}_{IT}, \quad (1)$$

the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

the Dirichlet boundary condition

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

and the overdetermination condition

$$u(x_0, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

The problem of determining

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{III}_{lT}) \cap C(\overline{\mathbb{III}}_{lT}) \quad (A)$$

from (1)-(3) with given  $k(t)$  and  $\varphi(x)$  is called the direct problem for a 1D pseudoparabolic integro differential equation, where

$$\overline{\mathbb{III}}_{lT} = \{[0, l] \times [0, T]\}.$$

**Definition.** *The pair of the functions  $\{u(x, t), k(t)\}$  is called a classical solution to the inverse problem, if*

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{III}_{lT}), \quad \text{and} \quad k(t) \in C^1[0, T]$$

*and satisfying the every relation of the system (1)-(4) at every point of the corresponding their domain.*

Everywhere in this paper, we require the following conditions for known functions:

$$A1) \quad \varphi'' \in C^2[0, l], \quad \varphi''' \in L_2(0, l): \quad \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

**Theorem 1.** *Let that the conditions A1) and  $k \in C^1[0, T]$  hold. Then the direct problem has a unique classical solution.*

**Lemma 1.** *Let the condition A1) be holds. Then the following representations are valid:*

$$\varphi_n = -\left(\frac{l}{\pi n}\right)^3 \varphi_n^{(3)} \quad (5)$$

here  $\varphi_n^{(3)}$  are coefficients of the expansion of function  $\varphi'''(x)$  in series with respect to the function system  $\left\{\frac{2}{l} \cos \frac{\pi n}{l} x\right\}_{n \geq 1}$  such that

$$\sum_n^\infty |\varphi_n^{(3)}|^2 \leq \int_0^l (\varphi'''(x))^2 dx. \quad (6)$$

**Theorem 2.** Assume that conditions of Theorem 1 hold. Then problem (1)-(3) solution (9) can be estimated with

$$\|u(x, t)\|_{L^2(0,l)} \leq c_2 \|\varphi(x)\|_{L^2(0,l)}, \quad (7)$$

$$\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Pi}_{lT})} \leq c_3 \|\varphi'(x)\|_{L^2(0,l)}, \quad (8)$$

for all  $t \in [0, T]$ , where  $c_i$  do not depend on the function  $\varphi(x)$ .

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}(1+k(0))t} + \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}(1+k(0))(t-\tau)} k(\tau) d\tau \right) \varphi_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}(1+k(0))(t-\tau)} d\tau \int_0^{\tau} (k'(\tau-s) + k(\tau-s)) u_n(s) ds \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (9)$$

**Theorem 3.** Let  $T > 0$  be an arbitrary fixed number and the conditions A1) – A3) hold. Then, there exists a unique solution of inverse problem (1) to (4) in the class  $k(t) \in C^1[0, T]$  and  $u(x, t) \in Y_{lT}$

*Literature:*

1.Аблабеков Б. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. Saarbrucken 2013. 10.D

## ON THE INVERSE PROBLEM FOR A BOUSSINESQ TYPE TIME-FRACTIONAL SUBDIFFUSION EQUATIONS

<sup>1</sup>Fayziev Yu. E., <sup>2</sup>Dekhqonov Kh. T., <sup>3</sup>Nosirova D.E., <sup>4</sup>Makhmudova D.G'.

<sup>1,3,4</sup>National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

<sup>2</sup> Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

[fayziev.yusuf@mail.ru](mailto:fayziev.yusuf@mail.ru), [khusanboyd4686@gmail.com](mailto:khusanboyd4686@gmail.com), [nosirova.erkinovna@mail.ru](mailto:nosirova.erkinovna@mail.ru),  
[dilnozik@gmail.com](mailto:dilnozik@gmail.com),

Let  $H$  be a separable Hilbert space with the scalar product  $(\cdot, \cdot)$  and the norm  $\|\cdot\|$  and  $A: H \rightarrow H$  be an arbitrary unbounded positive selfadjoint operator in  $H$ .

Suppose that  $A$  has a complete in  $H$  system of orthonormal eigenfunctions  $\{v_k\}$  and a countable set of positive eigenvalues  $\lambda_k$ . It is convenient to assume that the eigenvalues do not decrease as their number increases, i.e.  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$ . Let  $C((a,b);H)$  stand for a set of continuous functions  $u(t)$  of  $t \in (a,b)$  with values in  $H$ .

Let  $1 < \rho < 2$ . Consider the following problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + D_t^\rho (Au(t)) + Au(t) = f, & 0 < t \leq T; \\ u(+0) = \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\varphi, f \in H$ ,  $D_t^\rho$  – the Gerasimov-Caputo derivative of order  $\rho$  [1]. These problems are also called the direct problems.

In this paper, we study the inverse problem of determining the right-hand side of the equation. For this we need an additional condition. As an additional condition, we use the following condition:

$$u(\tau) = \Psi, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (2)$$

where  $\Psi \in H$  is given element and  $\tau$  – fixed point.

**Definition.** A pair  $\{u(t), f\}$  of functions  $u(t) \in C((0,T];H)$  and  $f \in H$  with the properties  $D_t^\rho u(t), D_t^\rho (Au(t)), Au(t) \in C((0,T];H)$  and satisfying conditions (1), (2) is called the solution of the inverse problem (1), (2).

In this paper, we prove the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem (1), (2).

Note, if in case  $0 < \rho < 1$  equation of the problem (1) is called the equation of the Barenblatt-Zhel'tov-Kachino type [2], in case  $1 < \rho < 2$  the equation of the Boussinesq type.

### *References*

1. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier (2006).

2. R. R. Ashurov, Yu. E. Fayziyev, N. Kh. Khushvaktov, “Forward and inverse problems for the Barenblatt-Zhel'tov-Kochina type fractional equations,” *Lobachevskii journal of Mathematics*, 5, 97–104 (2022).

## INVERSE PROBLEM FOR WHITHAM TYPE MULTI-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH IMPULSE EFFECTS

*Fayziyev Aziz Kudratillayevich*

*Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan*

[fayziyev.a@inbox.ru](mailto:fayziyev.a@inbox.ru)

In the article the questions of unique solvability and determination of the redefinition coefficient function in the inverse problem for multi-dimensional Whitham-type partial differential equation with impulse effects are studied. The modified method of characteristics allows partial differential equations of the first order to be represented as ordinary differential equations that describe the change of an unknown function along the line of characteristics. The unique solvability of the multi-dimensional inverse problem is proved by the method of successive approximations and contraction mappings. The definition of the unknown coefficient is reduced to solving the Volterra integral equation of the first kind.

In this paper we consider the questions of unique solvability and determination of the redefinition coefficient function in the inverse problem for multi-dimensional Whitham-type partial differential equation with nonlinear initial value and nonlinear impulse conditions. So, in the domain  $\Omega \equiv [0; T] \times \mathbb{R}^n$  for  $t \neq t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  we study the following multi-dimensional quasilinear equation

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \right) u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \alpha(t) \beta(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (1)$$

with nonlinear initial value condition

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)|_{t=0} = \varphi \left( x_1, x_2, \dots, x_n, \int_0^T K(\xi) u(\xi, x_1, x_2, \dots, x_n) d\xi \right) \quad (2)$$

and nonlinear impulsive condition

$$u(t_i^+, x_1, x_2, \dots, x_n) - u(t_i^-, x_1, x_2, \dots, x_n) = G_i(u(t_i, x_1, x_2, \dots, x_n)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (3)$$

where  $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  is desired function,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha(t)$  unknown

coefficient function,  $t \neq t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T < \infty$ ,

$\mathbb{R} \equiv (-\infty, \infty)$ ,  $\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^{1,1,\dots,1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u) \in C^{0,1,1,\dots,1,0}(\Omega \times \mathbb{R})$ ,

$$\int_0^T |K(\xi)| d\xi < \infty, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}),$$

$$u(t_i^+, x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} u(t_i + \nu, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$u(t_i^-, x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\nu \rightarrow 0^-} u(t_i - \nu, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

are right-hand side and left-hand side limits of function  $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  at the point  $t = t_i$ , respectively.

We use some Banach spaces: the space  $C(\Omega, \mathbb{R})$  consists continuous function  $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  with the norm

$$\|u\|_C = \sup_{(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega} |u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)|;$$

we also need in using the linear space

$$PC(\Omega, \mathbb{R}) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(\Omega_{i,i+1}, \mathbb{R}), i = 1, \dots, p \right\}$$

with the following norm

$$\|u\|_{PC} = \max \left\{ \|u\|_{C(\Omega_{i,i+1})}, i = 1, 2, \dots, p \right\},$$

where  $\Omega_{i,i+1} = (t_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n$ ,  $u(t_i^+, x_1, x_2, \dots, x_n)$  and  $u(t_i^-, x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ )

exist and are bounded;  $u(t_i^-, x_1, x_2, \dots, x_n) = u(t_i, x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

To determine the redefinition coefficient function  $\alpha(t)$  in the initial value problem (1)-(3), we use the following condition

$$u(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \psi(t), \quad (4)$$

where  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$ ,  $\psi(t) \in C^1[0; T]$ ,  $\varphi\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \int_0^T K(\xi)\psi(\xi)d\xi\right) = \psi(0^+)$ .

Multi-dimensional direct problem (1)-(3). Find a unknown function  $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in PC(\Omega, \mathbb{R})$ , that the function  $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  for all  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $t \neq t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  satisfies the differential equation (1), initial value condition (2) and for  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $t = t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  satisfies the nonlinear limit condition (3).

Multi-dimensional inverse problem (1)-(4). Find a pair of unknown functions  $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in PC(\Omega, \mathbb{R})$  and  $\alpha(t) \in C([0, T], \mathbb{R})$ , that the function  $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  for all  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $t \neq t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  satisfies the differential equation (1), initial value condition (2), for  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $t = t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  satisfies the nonlinear limit condition (3) and additional condition (4).

### References

1. Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 2022, 13(1), P. 36-44. doi:<https://doi.org/10.17586/2220-8054-2022-13-1-36-44>
2. Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. Integral condition with nonlinear kernel for an impulsive system of differential equations with maxima and redefinition vector. *Lobachevskii Journ. Math.*, 2022, 43(8), P. 2332-2340.
3. Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. Inverse problem for a second order impulsive system of integro-differential equations with two redefinition vectors and mixed maxima, *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 2023. T. 14. № 1. C. 13–21. doi: [10.17586/2220-8054-2023-14-1-13-21](https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-1-13-21)

4. Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. On a nonlinear impulsive differential equations with maxima. Bulletin of the institute of Mathematics, 2021, Vol.4, №6, ISSN-2181-9483, pp 42-49.

## BESSEL FUNKSIYASINING INTEGRAL KO'RINISHI

*F.A. Guliyeva*

*Jizzax davlat pedagogika universiteti, Jizzax, O'zbekiston*

Ushbu

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

integral butun  $n$  va kompleks  $z$  lar uchun Bessel integral deyiladi. (1) integralni

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \exp\{-in\theta + iz \sin \theta\} d\theta \quad (2)$$

ko'rinishida tasvirlash mumkin [1]. Ishning asosiy maqsadi (2) integral

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - n^2)y = 0$$

Bessel tenglamasini qanoatlantirishini ko'rsatish.

*Adabiyotlar*

1. Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции. Москва, Наука, 1990.

## A LINEAR EVASION DIFFERENTIAL GAME OF ONE EVADER AND ONE PURSUER

<sup>1</sup>*Ibragimov G.I.,* <sup>2</sup>*Tursunaliyev T.G.*

<sup>1</sup>*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

<sup>2</sup>*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

[ibragimov@upm.edu.my](mailto:ibragimov@upm.edu.my), [toychivoytursunaliyev@gmail.com](mailto:toychivoytursunaliyev@gmail.com)

In the paper, we consider a linear evasion differential game problem of one pursuer and one evader in  $R^2$ . The dynamics of the pursuer  $x$  and evader  $y$  are described by the equations

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= -\lambda\bar{x} + u, & \bar{x}(0) &= \bar{x}_0, \\ \dot{\bar{y}} &= -\lambda\bar{y} + v, & \bar{y}(0) &= \bar{y}_0,\end{aligned}\tag{1}$$

where  $\bar{x}, \bar{x}_0, \bar{y}, \bar{y}_0, u, v \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda > 0$ ;  $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$  and  $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$  are the initial states of the players at  $t=0$  and suppose  $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$ ; vectors  $u, v$  are control parameters of the pursuer and evader, respectively,

$$|u(t)| \leq 1 \quad \text{and} \quad |v(t)| \leq \sigma, \quad t \geq 0.\tag{2}$$

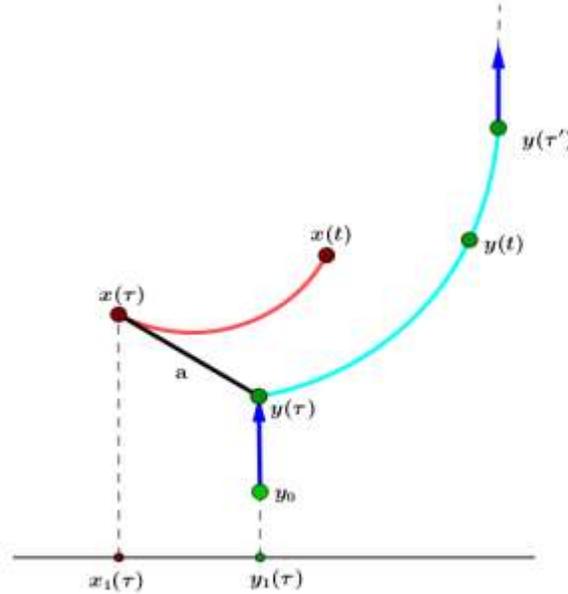
The solutions of equations (1) are

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \int_0^t e^{\lambda s} u(s) ds, & x(t) &= e^{\lambda t} \bar{x}(t), \\ y(t) &= y_0 + \int_0^t e^{\lambda s} v(s) ds, & y(t) &= e^{\lambda t} \bar{y}(t).\end{aligned}\tag{3}$$

We fix the numbers  $\alpha$  and  $a$

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}(\sigma - 1), \quad 0 < a < |x_0 - y_0|.\tag{4}$$

The pursuer  $x$  applies an arbitrary control  $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ ,  $t \geq 0$ , and let  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  be the corresponding trajectory of the pursuer.



**Fig. 1** Trajectory of the evader when  $x_1(\tau) \leq y_1(\tau)$

We now construct a strategy for the evader. First, the evader starting from the initial time  $t = 0$  moves with the velocity

$$V_0 = (0, \sigma), \quad t \in [0, \tau), \quad (5)$$

that is,  $v_1(t) = 0$ ,  $v_2(t) = \sigma$ , parallel to the  $Oy$ -axis, where  $\tau$  is the first time when  $|x(t) - y(t)| = a$ . We call  $\tau$  the  $a$ -approach time of pursuer to the evader. The segment between the points  $y_0$  and  $y(\tau)$  in Fig. 1 is the trajectory of the evader corresponding to (5).

Note that time  $\tau$  may not occur. In this case, we have  $|x(t) - y(t)| > a$  for all  $t \geq 0$  and, clearly,  $x(t) \neq y(t)$  for all  $t \geq 0$ . Therefore, we assume that the time  $\tau$  occurs.

$$\text{Also, we define } \tau' = \frac{1}{\lambda} \ln \left( e^{\lambda \tau} + \frac{\lambda a}{\alpha + \sigma + 1} \right).$$

The evader applies  $V(t) = (V_1(t), V_2(t))$ , where

$$V_1(t) = \begin{cases} |u_1(t)| + \alpha, & x_1(\tau) \leq y_1(\tau) \\ -(|u_1(t)| + \alpha) & x_1(\tau) > y_1(\tau) \end{cases}, \quad V_2(t) = \sqrt{\sigma^2 - V_1(t)}. \quad (6)$$

Clearly,  $|V_1(t)| \leq |u_1(t)| + \frac{1}{2}(\sigma - 1) \leq \sigma$ , and so  $V_2(t)$  is defined. The evader applies the following strategy on  $[\tau, \tau')$ :

$$V(t) = (V_1(t), V_2(t)), \quad t \in [\tau, \tau'). \quad (7)$$

We call  $V(t)$  defined by (7) a maneuver of the evader  $y$  against the pursuer  $x$ . For the final part of evader's strategy, we let

$$V_0 = (0, \sigma), \quad t \geq \tau'. \quad (8)$$

**Theorem.** Let the evader use the strategy (5), (7) and (8), where  $\tau$  is the  $a$ -approach time of the pursuer to the evader  $y$ . Then,

$$|x(t) - y(t)| \geq a, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (9)$$

$$|x(t) - y(t)| > \frac{\alpha a}{2\sigma}, \quad \tau \leq t \leq \tau', \quad (10)$$

$$y_2(t) - x_2(t) > a, \quad t > \tau'. \quad (11)$$

### *References*

1. Alias IA, Ibragimov G, Rakhmanov A (2016) Evasion differential game of infinitely many evaders from infinitely many pursuers in Hilbert space. *Dyn Games Appl* 6((2)):1–13. <https://doi.org/10.1007/s13235016-0196-0>
2. Azamov AA, Ibragimov GI, Ibaydullaev T, Alias IA (2021) Optimal number of pursuers in the differential games on the 1-skeleton of orthoplex. *Symmetry (Game Theoretical Symmetry Dynamic Processes)*. <https://doi.org/10.3390/sym13112170>
3. Blagodatskikh AI, Petrov NN (2009) Conflict interaction between groups of controlled objects. Udmurt State University Press, Izhevsk ((in Russian))
4. Ibragimov GI, Ferrara M, Ruziboev M, Pansera BA (2021) Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints. *Int J Game Theory* 50:729–750. <https://doi.org/10.1007/s00182-021-00760-6>  
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.04.012>.
5. Ibragimov GI (2023) Evasion differential game of one evader and many slow pursuers. *Dynamic Games and Applications*. <https://doi.org/10.1007/s13235-023-00501-2>

## **BIR JINSLI BO'LMAGAN POLIANALITIK TENGLAMA**

### **YECHIMINI DAVOM ETTIRISH**

*<sup>1</sup>T. Ishankulov, <sup>2</sup>M. Mannonov,*

*<sup>1,2</sup>Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston*

*[maxmudjon\\_mannonov@mail.ru](mailto:maxmudjon_mannonov@mail.ru)*

Kompleks o'zgaruvchining  $z = x + iy$  tekisligida  $L$  oddiy yopiq egri chiziq bilan chegaralangan sohani  $D_i$  orqali,  $L$  ning tashqarisini  $D_e$  orqali belgilaymiz.

$\gamma_0(\zeta), \dots, \gamma_{n-1}(\zeta) - L$  da berilgan jamlanuvchi funksiyalar bo'lsin. Polianalitik funksiyalar nazariyasida muhim rol o'ynaydigan Koshi tipidagi integral [2]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta})\gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (1)$$

$n$  ta regulyar polianalitik funksiyani tasvirlaydi. Ulardan  $n-1$ tasi  $D_i$  sohada,  $n$ -chisi esa  $D_e$  sohada aniqlangan. (1) Koshi tipidagi integral Koshi integraliga aylanishi uchun

$$\int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta})\gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \zeta^n d\zeta, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarli [2]. Boshqacha aytganda, (2) shartlar (1) integralning va hosilasining  $L$  ning deyarli hamma yerida mos ravishda  $\gamma_0(\zeta), \gamma_1(\zeta), \dots, \gamma_1(\zeta)$  bilan ustma-ust tushishi uchun zarur va yetarlidir. Bu holda  $D_e$  sohada (1) integral aynan nolga teng bo'ladi.

**Masala:** Bir jinsli bo'lmagan polianalitik tenglama uchun quyidagi masalasini qaraymiz:

$$\frac{\partial^n W(z)}{\partial \bar{z}^n} = f(z), \quad z \in D_i, \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (3)$$

$$W(z) = \gamma_0(z), \quad \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} = \gamma_1(z), \dots, \frac{\partial^{n-1} W(z)}{\partial \bar{z}^{n-1}}, \quad z \in L. \quad (4)$$

$n = 2$  bo'lganida (3), (4) masala [1] ni umumlashtiradi.

Bu masala bir jinsli polianalitik tenglamadagi kabi ortig'i bilan aniqlangan bo'lib, nokorrekt masala hisoblanadi.

(3)-(4) berilgan masalasining yechimi mavjudligi kriteriyasini o'rnatamiz.

**Teorema.**  $f \in L_p(D_i, \mathbb{C}), (p > 2), \gamma_0 \in C^{n-1}(L, \mathbb{C}), \dots, \gamma_{n-1} \in C(L, \mathbb{C})$  uchun (3), (4) berilgan masalasi yechimga ega bo'ladi faqat va faqat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \zeta^n d\zeta -$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{D_i} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) \zeta^n d\xi d\eta = 0, \zeta = \xi + i\eta, (n = 0, 1, 2, \dots)$$
(5)

*shartlar bajarilsa. Bu shartlar bajarilganda yagona yechim*

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \gamma_0(\zeta) + (\bar{z} - \bar{\zeta}) \gamma_1(\zeta) + \dots + \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{n-1}(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\zeta - z} -$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{D_i} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta})^{n-1}}{(n-1)!} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, z \in D_i$$
(6)

*formula bilan beriladi.*

**Izoh.** Bir jinsli bo'lmagan polianalitik tenglama uchun Dirixle masalasi [2], [3] da ko'rib chiqilgan.

#### *Foydalanilgan adabiyotlar*

1. T. Ishankulov, M. Mannonov, N. Mukarramxodjayeva, “Bir jinsli bo'lmagan bianlitik tenglama yechimini davom ettirish”. NamDU axborotnomasi 12-son, (2022), 67-75 betlar
2. H. Begehr and A. Kumar, “Boundary value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation”, Analysis., vol 25 (2005), pp. 55–71.
3. H. Begehr, “Boundary value problems in complex analysis” I, II, Boletin de la Asociación Matemática Venezolana, vol. 12 (2005), pp. 65–85, 223–241.
4. T. Ishankulov, “On the possibility generalized analytical continuation in the domain functions given on a pies of the boundary”, Siberian Mathematical Journal, vol. 1 no 2, (2000), pp. 1350–1356.

# KASR TARTIBLI ARALASH TIPDAGI TENGLAMALARDA MANBAA FUNKSIYASINI TOPISH BO'YICHA TESKARI MASALANI YECHISH

*L.Jovliyeva<sup>1</sup>,*

*<sup>1</sup>O'zbekiston Milliy Universiteti magistranti, Toshkent, O'zbekiston*

*layloj03@gmail.com*

Differensial tenglamalar nazariyasida (butun yoki kasr tartibli) ikki xil masalalar mavjud: to'g'ri va teskari masalalar. Quyidagi keltirilgan na'munada boshlang'ich-chegaraviy masalani qaraymiz:

$$u_t(x,t) - a(x,t)\Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Omega \subset R^N, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x,t) = \psi(x,t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in \Omega, \quad (3)$$

bu yerda  $\Delta u(x,t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(x,t)$  — Laplas operatori.

Matematik fizika tenglamalari uchun teskari masalalarni o'rganishga bo'lgan qiziqish ularning zamonaviy fanning ko'plab sohalarida, jumladan, mexanika seysmologiya, tibbiy tomografiya, epidemoya va geofizikada qo'llanishining muhimligi bilan bog'liq. Ko'pgina tadqiqotlar subdiffuziya tenglamalarining o'ng tomonini aniqlashning teskari muammolariga bag'ishlangan.

*Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati .*

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, North-Holland, Mathematics studies. 2006.
2. S.R. Umarov, K.M. Shinaliyev, Botirxon X. Turmetov. "A fractional operator algorithm metod for construction of solutions of fractional order differential equations" – 2012.

# SOLVABILITY OF INVERSE PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL HEAT EQUATION WITH PERIODIC AND INTEGRAL CONDITIONS

*J.J. Jumaev*

*Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan,  
[jonibekjj@mail.ru](mailto:jonibekjj@mail.ru)*

We consider the initial-periodic boundary problem for the heat equation with a convolution-type integral term on the right-hand side

$$\partial_t^\alpha u - u_{xx} + a(t)u = f(x)g(t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1), \quad (3)$$

$T$  is arbitrary positive number and  $D_T := \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ .

The problem of determining a function  $u(x, t), (x, t) \in D_T$ , that satisfies (1)-(3) with known functions  $k(t)$  and  $\varphi(x)$  will be called the direct problem.

In the inverse problem, it is required to determine the kernel  $k(t), t > 0$ , of the integral in (1) using overdetermination condition about the solution of the direct problem (1)-(3):

$$\int_0^1 \omega_i(x)u(x, t)dx = h_i(t), \quad x \in (0, 1), \quad (4)$$

where  $\omega(x), h(t)$  are given functions.

**Definition.** *The pair  $\{u(x, t), k(t)\}$  from the class  $C^{2,\alpha}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T}) \times C[0, T]$  is said to be a classical solution of problem (1)-(4), if the functions  $u(x, t)$  and  $k(t)$  satisfy the following conditions:*

- (1) *The function  $u(x, t)$  and its derivatives  $\partial_t^\alpha u(x, t), u_{xx}(x, t)$  are continuous in the domain  $D_T$ ;*
- (2) *the function  $k(t)$  is continuous on the interval  $[0, T]$ ;*
- (3) *equation [1] and conditions [2]-[4] are satisfied in the classical (usual) sense.*

In this work, we consider inverse problem of determining  $u(x, t)$  and  $k(t)$  functions in the one-dimensional integro-differential diffusion equation with the

initial- periodic boundary and overdetermination conditions. The unique solvability of the direct problem are proved. To investigate the solvability of the inverse problem, we first consider an auxiliary inverse boundary value problem, which is equivalent to the original one. Existence and uniqueness of the solution of the equivalent problem is proved using a contraction mapping. Finally, using the equivalency, the existence and uniqueness of classical solution is obtained.

#### *REFERENCES*

1. Sumit Sharma, Molecular Dynamics Simulation of Nanocomposites Using BIOVIA Materials Studio, Lammgs and Gromacs, Elsevier, p. 349, <https://doi.org/10.1016/C2017-0-04396-3>
2. I. Baglan, Determination of a coefficient in a quasilinear parabolic equation with periodic boundary condition, *Inverse Probl. Sci. and Eng.* (2014).2. 4. F. Kanca, The inverse coefficient problem of the heat equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions, *J. In equal. and Appl.* (2013).
3. D. Durdiev, Zh. Zhumaev, Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 45, No. 14, 2022, pp. 8374-8388
4. A. Kilbas, *Integral equations: course of lectures*, Minsk: BSU, 2005. (In Russian)

### **A GENERALIZED $(G'/G)$ - EXPANSION METHOD FOR THE LOADED NONLINEAR DEGASPERIS-PROCESI EQUATION**

*M.M.Khasanov<sup>1</sup>, O.Y.Ganjaev<sup>1</sup>, U.J.Shermetova<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Urgench state university, Urgench, Uzbekistan,*

<sup>2</sup>*Academic lyceum of Urgench state university, Urgench, Uzbekistan*

*[hmuzaffar@mail.ru](mailto:hmuzaffar@mail.ru)*

This paper is dedicated to find the solutions of the equation of the loaded nonlinear Degasperis-Procesi equation. It is shown that  $(G'/G)$  - expansion method is one of the most effective way of finding the solutions.

Consider the following loaded nonlinear Degasperis-Procesi equation

$$u_t - u_{xxt} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)(4uu_x - cu_x), \quad (1)$$

where  $u(x,t)$  is an unknown function,  $x \in R$ ,  $t \geq 0$ ,  $\gamma(t)$  - is the given real continuous function.

### Description of the generalized $(G'/G)$ -expansion method

Let us given a nonlinear partial differential equation in the following form

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (2)$$

with two independent variables  $x$  and  $t$ . Besides,  $u = u(x,t)$  is a unknown function,  $F$  is a polynomial in  $u$  and its partial derivatives in which the highest order derivatives and nonlinear terms are involved. Now we give the main steps of the  $(G'/G)$ -expansion method [3]:

**Step 1.** We find the solution  $u$  in the following form:

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - \Omega(t), \quad (3)$$

where  $\Omega(t)$  is a continuous function dependent on  $t$ . We reduce equation (2) to the following nonlinear ordinary differential equation:

$$P(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (4)$$

where  $P$  is a polynomial of  $u(\xi)$  and its all derivatives  $u' = du(\xi)/d\xi$ ,  $u'' = d^2u(\xi)/d\xi^2$ ,

**Step 2.** We assume that the solution of equation (4) has the form:

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^m a_j \left( \frac{G'}{G} \right)^j, \quad (5)$$

where  $G = G(\xi)$  satisfies the following second order ordinary differential equation

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \quad (6)$$

where  $G' = dG(\xi)/d\xi$ ,  $G'' = d^2G(\xi)/d\xi^2$  and  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $a_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) are constants that can be determined later, provided  $a_m \neq 0$ .

**Step 3.** We determine the integer number  $m$  by balancing the nonlinear terms of the highest order and the partial product of the highest order of (4).

**Step 4.** Substitute (5) along with (6) into (4) and collect all terms with the same order of  $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ , the left-hand side of (4) is converted into a polynomial in  $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ . Then, equating each coefficient of this polynomial to zero we derive a set of over-determined partial differential equations for  $a_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) and  $\xi$ .

**Step 5.** Substituting the values  $a_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) and  $\xi$  as well as the solutions of equation (6) into (5), we have the exact solutions of equation (2).

#### REFERENCES

1. A. Bekir, Application of the (G'/G)-expansion method for nonlinear evolution equations, Phys. Lett. A, 372, 3400 (2008).
2. S. Zhang, J. L. Tong, W. Wang, A generalized (G'/G)-expansion method for the mKdV equation with variable coefficients, Phys. Lett. A, 372, 2254 (2008).
3. M. Wang, X. Li, J. Zhang, The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, PhysLett. A., 372, 417 (2008).
4. Urazboev G.U., Baltaeva I.I., Rakhimov I.D. A generalized (G'/G)-expansion method for the loaded Korteweg-de Vries equation. Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki, 2021, vol. 24, p. 139. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.410>(in Russian)
5. Baltaeva I. I., Rakhimov I. D., Khasanov M. M. Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg-de Vries Equation. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2022, vol. 41, pp. 85–95.

### UMUMLASHGAN ROSENAU-BURGER TENGLAMASI UCHUN CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING MAVJUDLIGI HAQIDA

*Mamanazarov Azizbek Otajon o'g'li, Muxtorov Diyorbek Qudratillo o'g'li*

*Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, o'zbekiston*

*[mamanazarovaz1992@gmail.com](mailto:mamanazarovaz1992@gmail.com), [muxtorovdiyorbek96@gmail.com](mailto:muxtorovdiyorbek96@gmail.com)*

$\mathbb{R}^2$  dagi to'g'ri to'rtburchakli sohani  $\Omega$  bilan belgilaylik:

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, a < x < b\}.$$

$\Omega$  sohada ushbu umumlashgan Rosenau-Burger tenglamasi

$$D_{0+,t}^{\alpha,\beta} u(t, x) + u_{xxxx}(t, x) + u_x(t, x) + \frac{1}{2} D_{a+}^{\gamma} u^2(t, x) = v u_{xx}(t, x) \quad (1)$$

va quyidagi boshlang'ich shart berilgan bo'lsin:

$$I_{0+,t}^{\gamma-1} u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [a, b], \quad (2)$$

bu yerda  $D_{a+}^{\alpha,\beta}$  –  $0 < \alpha < 1$  tartibli va  $0 \leq \beta \leq 1$  tipli Hilfer hosilasi,  $D_{a+}^{\gamma}$  – Riman-Liuvillning chap tomonli  $0 < \gamma < 1$  kasr tartibli hosilasi,  $I_{0+,t}^{\gamma-1}$  – Riman-Liuvillning chap tomonli  $0 < \gamma < 1$  tartibli kasr integrali va  $u_0(x)$  berilgan funksiya.

(1) - (2) masala yechimining mavjudligi masalasini qaraylik. Buning uchun noxiziqli tenglamalar yechimlarining buzilishini tahlil qilish uchun Poxojayev tomonidan taklif etilgan usuldan foydalanamiz [1].

$T > 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  ixtiyoriy parametrlar bilan  $\Omega$  sohada aniqlangan  $\varphi(t, x)$  funksiyalarning quyidagi xossalarga ega  $\Phi(\Omega)$  sinfini qaraylik:

$$(i) \quad \varphi_t, \varphi_{xx}, \varphi_{xxx}, \varphi_{xxxx}, \varphi_{xxxxt} \in C(\Omega); \quad \Omega \text{ da } I_{b-,x}^{1-\gamma} \varphi_x \geq 0;$$

$$(ii) \quad x \in (a, b) \text{ va } t = T \text{ da } I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(x, t) + \varphi_{xxxx} u = 0$$

$$(iii) \quad \zeta(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{(L^* \varphi)^2}{\varphi_x} dt dx < +\infty;$$

$$\text{bu yerda } L^* \varphi = -I_{T-,t}^{(1-\beta)(1-\alpha)} D_{T-,t}^{1-\beta(1-\alpha)} \varphi - \varphi_{xxxxt} - v \varphi_{xx} - \varphi_x.$$

Faraz qilaylik, (1) - (2) masalaning ixtiyoriy  $\varphi(x, t) \in \Phi(\Omega)$  uchun  $u_{xxxx}, D_{0+,t}^{\alpha,\beta} u \in C([a, b] \times [0, t])$  shartni qanoatlantiradigan sust yechimi va  $T > 0$  son mavjud bo'lsin.

Endi (1) tenglamani  $\varphi \in \Phi(\Omega)$  funksiyaga ko'paytirib,  $\Omega$  bo'yicha integrallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \varphi(t, x) D_{0+,t}^{\alpha, \beta} u(t, x) dt dx + \iint_{\Omega} \varphi(t, x) u(t, x) dt dx - \iint_{\Omega} \varphi(t, x) u_{xxx}(t, x) dt dx + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \varphi(t, x) D_{a+}^{\gamma} u^2(t, x) dt dx = \nu \iint_{\Omega} \varphi(t, x) u_{xx}(t, x) dt dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Bo'laklab integrallab, (2) va (ii) dan quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{\Omega} u^2(t, x) \varphi_x(t, x) dt dx &= \iint_{\Omega} u(t, x) (L^* \varphi)(t, x) dt dx + \int_0^T B(u(t, x), \varphi(t, x)) \Big|_a^b dt - \\ & - \int_a^b \left[ u_0(x) I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(x, t) + f(x) \right] dx \end{aligned} \quad (4)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} B(u(t, x), \varphi(t, x)) &= \frac{1}{2} \varphi(t, x) I_{a+}^{1-\gamma} u^2(t, x) + \varphi(t, x) u_{xxx}(t, x) - \varphi_x(t, x) u_{xxx}(t, x) - \\ & - \varphi_{xxx}(t, x) u_t(t, x) - \nu u_x(t, x) \varphi(t, x) + \nu u(t, x) \varphi_x(t, x) + \varphi(t, x) u(t, x). \end{aligned}$$

Gyolder va Yung tengsizliklaridan foydalansak, quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\left| \iint_{\Omega} u(t, x) (L^* \varphi)(t, x) dt dx \right| \leq \frac{1}{2} \iint_{\Omega} u^2(t, x) I_{b-,x}^{1-\gamma} \varphi_x(t, x) dt dx + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{\left( (L^* \varphi)(t, x) \right)^2}{I_{b-,x}^{1-\gamma} \varphi_x(t, x)} dt dx.$$

Bu tengsizlik va (ii) xossadan (4) quyidagicha ko'rinish oladi:

$$0 \leq \frac{1}{2} \zeta(\Omega) + \int_0^T B(u(t, x), \varphi(t, x)) \Big|_a^b dt - \int_a^b \left[ u_0(x) I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(x, t) + f(x) \right] \Big|_{t=0} dx. \quad (5)$$

Quyidagi teorema o'rinli:

**Teorema.** Faraz qilaylik, chegaraviy shartlar va boshlang'ich funksiya  $u_0(x) \in L[a, b]$  ushbu shartlarni qanoatlantirsin: shunday  $\varphi(x, t) \in \Phi(\Omega)$  mavjudki, bo'lib, quyidagi tengsizlik o'rinli bo'lsin:

$$\frac{1}{2} \zeta(\Omega) + \int_0^T B(u(t, x), \varphi(t, x)) \Big|_a^b dt - \int_a^b \left[ u_0(x) I_{T-,t}^{\beta(1-\alpha)} \varphi(x, t) + f(x) \right] \Big|_{t=0} dx < 0.$$

U holda (1) - (2) masala  $\Omega$  da yechimga ega bo'lmaydi.

1. S.I. Pokhozhaev, Essentially nonlinear capacities induced by differential operators, Dokl.Ros. Akad. Nauk. 357(5) (1997), 592-594.

**ON THE FOCUSING NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH NON-ZERO BOUNDARY CONDITIONS AND DOUBLE POLES**

*N.A. Matchonov*

*Urgench state university, Urgench, Uzbekistan*

*numonjon.matchonov.97@mail.ru*

The inverse scattering transforms for the focusing non-linear Schrödinger (NLS) equation with non-zero boundary conditions at infinity and double zeros of the analytic scattering coefficients is presented. The general solution of the NLS equation in the case of an arbitrary finite number of double zeros is given and an explicit formula for soliton solutions arising in the case of a single quartet of purely imaginary double zeroes are shown.

The inverse scattering transform (IST) for the scalar NLS equation and coupled NLS systems with zero boundary conditions (ZBC) is well known [1-4]. The IST for the scalar defocusing NLS equation with (non-zero boundary conditions) NZBC was also done a long time ago in [5],[6], but the IST for two-component NLS systems with NZBC remained open for a long time, and was only recently done in [7] for the defocusing case [8]. The IST for the focusing two-component case with NZBC was also done in [9], building on the results of [10], where the IST for the scalar focusing NLS equation with NZBC was formulated.

Specifically, we study the focusing NLS equation

$$iq_t + q_{xx} + 2(|q|^2 - q_0^2)q = 0, \quad (1)$$

with non-zero boundary conditions as  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x, t) = q_{\pm} \quad (2)$$

Here,  $|q_{\pm}| = q_0 \neq 0$ . The term  $-2q_0^2 q$  in (1) is due to a rescaling chosen to make the boundary conditions independent of time for convenience. Namely, if  $q(x, t)$  is a solution to (1) and (2), then  $\bar{q}(x, t) = e^{2iq_0^2 t} q(x, t)$  solves the classical NLS equation  $i\bar{q}_t + \bar{q}_{xx} + 2|\bar{q}|^2 \bar{q} = 0$ , with boundary conditions  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{q}(x, t) = e^{2iq_0^2 t} q_{\pm}$ . The structure of this work is the following: we give an outline of the direct scattering.

We analyze the discrete spectrum and derive the residue conditions in the presence of double poles. We set up the inverse problem and give a formula for the solution of the focusing NLS equation as well as derive a trace formula for the analytic scattering coefficients and a “theta condition” for the phase difference between the boundary values of the potential. Finally, we give an explicit formula for a soliton solution corresponding to a quartet of purely imaginary discrete eigenvalues and describe the asymptotic behavior of such solutions.

### *References*

- [1]. Zakharov V.E., Shabat A.B. (1972) Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34, 62–69.
- [2]. Ablowitz M.J., Segur H. (1981) *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia: SIAM.
- [3]. Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. (1984) *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. New York: Plenum.
- [4]. Ablowitz M.J., Prinari B., Trubatch A.D. (2004) *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 302. Cambridge: Cambridge University Press.
- [5]. Zakharov V.E., Shabat A.B. (1973) Interaction between solitons in a stable medium. *Sov. Phys. JETP*, 37, 823–828.

- [6]. Faddeev L.D., Takhtajan L.A. (1987) Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons. Berlin: Springer.
- [7]. Prinari B., Ablowitz M.J., Biondini G. (2006) Inverse scattering transform for the vector nonlinear Schrödinger equation with non-vanishing boundary conditions. J. Math. Phys., 47, 063508.
- [8]. Biondini G., Kraus D.K. (2015) Inverse scattering transform for the defocusing Manakov system with nonzero boundary conditions. SIAM J. Math. Anal., 47, 607-757.
- [9]. Kraus D. K., Biondini G., Kovacic G. (2015) The focusing Manakov system with nonzero boundary conditions. Nonlinearity, 28, 3101-3151.
- [10]. Biondini G., Kovacic G. (2014) Inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions. J. Math. Phys., 55, 031506.

**BIR O‘LCHOVLI MODEL INTEGRO-DIFFERENSIAL ISSIQLIK  
O‘TKAZUVCHANLIK TENGLAMASI UCHUN TESKARI MASALANI  
YECHISH**

*Merajova Sh.B., Bekjonov M.M., Zoirov A.O.*  
*Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston*  
*[shsharipova@mail.ru](mailto:shsharipova@mail.ru)*

Teskari va nokorrekt masalalar nazariyasi fanning deyarli barcha sohalarida, xususan, quyidagi kabi amaliy masalalarni hal qilishda keng qo'llaniladi:

- fizika (kvant mexanikasi, akustika, elektrodinamika va boshqalar);
- geofizika (seysmik razvedka, elektr qidiruvi, tortishish kuchi, magnit razvedka va boshqalar);
- tibbiyot (rentgen-tomografiya, NMR-tomografiya, ultratovush va boshqalar);
- ekologiya (havo, suv holatini diagnostikasi, kosmik monitoring va boshqalar);
- iqtisodiyot (optimal boshqaruv nazariyasi, moliyaviy matematika va boshqalar)

Hozirgi kunda teskari masalarni o'rganish dolzarb hisoblanadi [1,2,3]. Maqolada bir o'lchovli model integro-differensial issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun issiqlik manbalarini aniqlash haqida teskari masala qaralib, yechish usuli berildi.

Quyidagi masalani qaraylik:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \int_0^t K(\tau)u(x, (t - \tau))d\tau + f(x) & t \in (0, T] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Masalani yechish uchun Furiye usulidan foydalanamiz [4], bu uhcun  $u(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $f(x)$  funksiyalarni xos funksiyalar bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (4)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (5)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (6)$$

(4), (6) ni (1) ga qo'yib quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$u'_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) = \int_0^t K(\tau)u_n(t - \tau)d\tau + f_n.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$F(t) = \int_0^t K(\tau)u_n(t - \tau)d\tau + f_n. \quad (7)$$

Natijada issiqlik o'tkazuvchalik tenglamasiga qo'yilagan Koshi masalasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} u'_n(t) + (\lambda_n^2)u_n(t) = F(t) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad (9)$$

(8),(9) masalaning yechimini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$u_n(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau + \varphi_n e^{-\lambda_n^2 t}. \quad (10)$$

(7) belgilashni (10) keltirib qo‘yamiz, bu yerda  $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ . Hosil bo‘lgan integral tenglamaning yechimi dastlabki tenglamaning yechimi bo‘ladi

#### ADABIYOTLAR

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Москва. “Наука” , 1984 г , 245 ст.
2. Дурдиев Д.К., Рашидов А.Ш. Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа// Дифференциальные уравнения. том 49, 2013 г.
3. D.K. Durdiev, J.J. Jumaev, Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, DOI: 10.1002/mma.7133.
4. Durdiev D. K. Merajova Sh. B. Inverse problem for an equation of mixed parabolic–hyperbolic type with a Bessel operator. в журнале // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2022 Год. № 16: 3 С. 394–402.

### INTEGRO-DIFFERENTIAL MODEL TENGLAMADA YADRONI ANIQLASH UCHUN TESKARI MASALA

*Merajova Sh.B.*

*Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston*

*[shsharipova@mail.ru](mailto:shsharipova@mail.ru)*

Ushbu ishda integro-differensial model parabolik tipdagi tenglamada yadroni aniqlash uchun teskari masala keltirilgan. Teskari masala no‘malum funksiyani saqlovchi yordamchi masala yordamida o‘rganilgan.

Hozirgi kunda teskari masalalarni o‘rganish muhim ahamiyatga ega, chunki bunday masalalar hayotda o‘zining amaliy tadbirini topayapti [1]. Ushbu maqolada biz integro-differensial model parabolik tipdagi tenglamada yadroni aniqlash uchun

teskari masalani keltirib, teskari masalani no‘malum funksiyani saqlovchi yordamchi masala yordamida o‘rgandik.

Ham amaliy, ham nazariy jihatdan parabolik integro-differensial tenglamalar uchun teskari masalalarni o‘rganish katta qiziqish uyg‘otadi. Qo‘shimcha ma’lumotlar bilan tenglamaning o‘ng tomoni yoki parabolik tipdagi tenglamaning koeffitsiyentlaridan birini aniqlashga doir bir qator ishlar mavjud, masalan [2,3].

Quyidagi tenglamani qaraylik:

$$u_t - Lu = \int_0^t K(x', \tau)u(x, t - \tau) d\tau, (x, t) \in R_T^n, \quad (1)$$

bu yerda,  $L$  – differensial operator bo‘lib, quyidagi ko‘rinishga ega:

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t).$$

Ushbu tenglama uchun quyidagi masalani qo‘yish mumkin:

**Teskari masala.** (1) tenglamanig quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi :

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$

$$u(x', 0, t) = g(x', t); \quad x' \in R^{n-1}, 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$g(x', 0) = \varphi(x', 0) \quad (4)$$

bu yerda  $R_T^n = \{(x, t) | x = (x', x_n) \in R^n, 0 < t < T, T > 0\}$ ,

$u(x, t)$  funksiya va  $K(x', t)$  tenglamaning yadrosi, ya’ni  $\{u(x, t), K(x', t)\}$  funksiyalar jufti aniqlansin.

Ushbu masalani yechish uchun dastlab uning yordamchi masalalarga ekvivalentligi ko‘rsatilib, integral tenglamaga keltrib yechiladi.

#### *Adabiyotlar*

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Москва. “Наука” , 1984 г , 245 ст.
2. Дурдиев Д.К., Рашидов А.Ш. Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа// Дифференциальные уравнения. том 49, 2013 г.

3. D.K. Durdiev, J.J.Jumaev, Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, DOI: 10.1002/mma.7133.

## BIR O'LCHAMLI KASR TARTIBLI DIFFUZIYA TENGLAMASIDAN MANBA FUNKSIYASINI ANIQLASH

*B.R. Mirzayev*

*Jizzax davlat pedagogika universiteti, Jizzax, O'zbekiston*

Quyidagi bir o'lchovli kasr diffuziya tenglamasini ko'rib chiqaylik:

$$Lu \equiv \partial_t^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) = h(x)f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

Tenglama quyidagi to'rtburchak sohada berilgan bo'lsin:

$$\Omega := \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}.$$

(1) tenglamani qanoatlantiruvchi  $u(x, t)$  funksiya (2) sinfga tegishli bo'lsin.

$$u(x, t) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_\gamma^{2,\alpha}(\Omega); \quad (2)$$

$$Lu = h(x)f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega; \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (5)$$

Bu yerda  $\varphi, f$  berilgan funksiyalar va  $\partial_t^\alpha$  – Kaputo ma'nosidagi kasr hosila [1],  $0 < \alpha \leq 1$  – tayinlangan son.

$f, h, \varphi$  va  $\alpha$  berilganda (2)-(5) masaladan  $u(x, t)$  funksiyaning topish masalasi to'g'ri masala deb yuritiladi.

**Teskari masala.** Ishning asosiy maqsadi (2)-(5) masala va

$$u(x, T) = g(x) \quad (6)$$

qo'shimcha shartdan  $u(x, t)$  va  $h(x)$  funksiyaning topishdan iborat.

*Adabiyotlar*

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

**ELLIPTIKO – GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN BIR  
NOLOKAL MASALA HAQIDA**

*Nishonova Sh.T, Mo'ydinjonova B.A*

*Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston*

*shahnozanishonova910@gmail.com*

$xOy$  tekislikda  $\Omega$ - bir bog'lamli soha,  $\sigma_0 = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, 0 < y < x\}$  chegaralangan egri chiziq va  $\overline{OB}, \overline{OD}, \overline{DA}$   $y = x, y = -x, y = x - 1$  to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha berilgan bo'lsin, bu yerda  $O(0,0), A(1,0), B(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), D(1/2, -1/2)$ .  $\Omega$  sohani  $y > 0, y < 0, y = 0, \Omega_0, \Omega_1, OA$  qismlarga ajratamiz.  $\Omega_0$ - elliptik soha,  $\Omega_1$ - giperbolik soha,  $OA$ - tip o'zgarish chizig'i deyiladi.

$N$ - masala.  $\Omega$  sohada

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y = 0, & (x, y) \in \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy} = 0, & (x, y) \in \Omega_1 \end{cases} \quad (1)$$

tenglamani shunday  $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$  regulyar yechimi topilsinki, quyidagi ulash,

$$\lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1; \quad (2)$$

chegaraviy

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\sigma_0}; \quad (3)$$

$$u(x, y)|_{OB} = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq 1/\sqrt{2}; \quad (4)$$

va

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = -u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) + f_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

nolokal shartlarni qanoatlantirsin. Bu yerda  $\varphi(x, y), \psi(y), f_1(x)$  - berilgan funksiyalar,  $\beta = \text{const} \in R, 0 < \beta < 1/2$ ;

$\Omega_1$  sohada quyidagi  $u(x, -0) = \tau(x), \tau(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$   
 $\lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y) = \nu(x), \nu(x) \in C^2(0, 1)$  belgilashlarga asosan bir jinsli tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimini ushbu

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu(z) dz \quad (6)$$

Dalamber formulasi yordamida yozib olamiz.

(6) tenglikni (5) nolokal shartga bo'ysundirib,

$$\tau(x) = f_1(x) - \frac{1}{2}[\tau(0) + \tau(1)] + \frac{1}{2} \int_0^1 \nu(z) dz \quad (7)$$

munosabatni olamiz. Bu munosabat  $\Omega_1$  sohada olingan  $\tau(x)$  va  $\nu(x)$  funksiyalar o'rtasidagi funksional munosabat deyiladi.

**Teorema.** Agar  $N$  masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u yagonadir.

**Isbot.** Faraz qilaylik, masala yechimi ikkita bo'lsin va ular ayirmasini  $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$  bilan belgilaylik, u holda  $\varphi(x, y) \equiv \psi(y) \equiv f_1(x) \equiv 0$  bo'ladi.  $\Omega_0$  sohada  $u(x, y)$  funksiya tenglamaning yechimi ekanligidan foydalanib,  $(xy)^{2\beta} u(x, y)$  funksiyaning (1) tenglamaga ko'paytirib, divergent holatga keltirib olamiz.

$$\iint_{\Omega_0} (xy)^{2\beta} (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \iint_{\Omega_0} \left\{ \left[ (xy)^{2\beta} uu_x \right]_x + \left[ (xy)^{2\beta} uu_y \right]_y \right\} dx dy.$$

Grin-Ostragradiskiy formulasiga va  $u|_{\sigma_0}(x, y) = u|_{OB}(x, y) = 0$  tengliklarga asosan

$$\iint_{\Omega_0} (xy)^{2\beta} (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \int_0^1 x^{2\beta} \tau(x) \nu(x) dx = 0, \quad (8)$$

tenglikni hosil qilamiz.  $f_1(x) = 0$  va  $\tau(0) = 0, \tau(1) = 0$  ekanligidan (7) tenglikka ko'ra

$$\tau(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 v(z) dz$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan  $\tau(x) = const$  ekanligi kelib chiqadi.  $\tau(0) = 0, \tau(1) = 0$  ekanligidan  $\tau(x) \equiv 0$  tenglikni olamiz. Bundan (8) tenglikni

$$\iint_{\Omega_0} (xy)^{2\beta} (u_x^2 + u_y^2) dx dy = 0$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Oxirgi tenglikdan  $\Omega_0$  sohada  $u(x, y) \equiv const$  ekanligi kelib chiqadi.  $\bar{\Omega}_0$  sohada  $u(x, y)|_{\sigma_0} = 0$  va  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_0)$  shartlarga asosan  $u(x, y) \equiv 0$  bo‘ladi, bundan esa masala yechimi yagona ekanligi kelib chiqadi.

#### *Adabiyotlar*

1. А.К.Уринов, Ш.Т.Нишонова. Задачи Трикоми и Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа в одной специальной области// Естественные и технические науки. 2010. №2(46). С.54-60.
2. Sh.T.Nishonova, B.A, Muydinjonova. О единственности решения задача Трикоми для уравнения смешанного типа в одной специальной области// Algebra va analizning dolzarb masalalari mavzusidagi respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari tuplami. -2022.18-19-noyabr.2-qism, 2022-yil. 150-152b.
3. Ш.Т.Нишонова, Б.А.Муйдинжонова. Задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами в одной специальной области. О‘zbekistonda fanlararo innovatsiyalar va ilmiy tadqiqotlar jurnali, 2023.2 (15). 510-517 b.
4. Nishonova.Sh.T, Muydinjonova.B.A. Singulyar koeffisientli elliptiko- giperbolik tipdagi tenglama uchun bir Triкоми- Neyman masalasining analogi haqida. Ijodkor o‘qituvchi ilmiy-uslubiy jurnal. 2023-y ,5-aprel, 28-son 159-164.

# GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN VAQT BO'YICHA NOLOKAL SHARTLI MASALA

*Nuraliyeva N.Sh*

*O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Matematika Instituti, Toshkent,*

*O'zbekiston*

*n.navbahor2197@gmail.com*

Quyidagi masalani qaraylik,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ u(x,\xi) = \alpha u(x,0) + \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq T \\ u_t(x,\xi) = \beta u_t(x,0) + \psi(x) \end{cases} \quad (1)$$

bu yerda  $f(x,t) \in C([0,1] \times (0,T))$ ,  $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$   $\alpha, \beta$  lar  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$  shartni qanoatlantiruvchi o'zgarmas sonlar,  $\xi$ -tayinlangan nuqta.

**Ta'rif.** Agar (1) masalaning barcha shartlarini qanoatlantiruvchi uzluksiz  $u(x,t)$  funksiya uchun  $u_{tt}, u_{xx} \in C([0,1] \times (0,T))$  shartlar bajarilsa, unga (1) nolokal masalaning yechimi deyiladi.

Masalani yechish uchun ikkita yordamchi masalalarni tuzib olamiz:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = f(x,t), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq T \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ v(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

va

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ w(x,\xi) = \alpha w(x,0) + \varphi^*(x), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq T \\ w_t(x,\xi) = \beta w_t(x,0) + \psi^*(x) \end{cases} \quad (3)$$

Bu yerda,  $\varphi^*(x), \psi^*(x) \in C[0,1]$  berilgan funksiyalar.

(3) masala (1) masalaning bir jinsli bo'lgan holi va (2) masalaning yechimini ham Ta'rif 1 kabi yozish mumkin.

Agar  $\varphi^*(x) = \varphi(x) - v(x, \xi)$ ,  $\psi^*(x) = \psi(x) - v_t(x, \xi)$  hamda  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  funksiyalar mos ravishda (2) va (3) masalalarning yechimi bo'lsa, u holda (1) masalaning yechimini  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$  ko'rinishida aniqlashimiz mumkin. Shuning uchun (1) masalaning yechimini topish uchun yordamchi masalalarni yechishimiz yetarli.

**Teorema.** Aytaylik,  $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$  va  $f(x, t) \in C([0,1] \times (0, T])$  funksiyalar uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsin:

a)  $\varphi^*(x), \psi^*(x)$  funksiyalar  $[0,1]$  da uzluksiz,  $\varphi^*(x)$  funksiya uch marta,  $\psi^*(x)$  funksiya ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,  $\varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0$ ,

$\varphi^{*''}(0) = \varphi^{*''}(1) = 0$ ,  $\psi^*(0) = \psi^*(1) = 0$  bo'lsin;

b)  $f(x, t)$  funksiya  $G = [0,1] \times (0, T]$  da uzlusiz,  $x$  o'zgaruvchi bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, butun  $[0, T]$  segmentda  $f(0, t) = f(1, t) = 0$  shartni qanoatlantirsin. U holda,

Agar  $\left| \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} \right| > 1$  yoki  $\left| \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} \right| \leq 1$  bo'lib, lekin barcha  $k \geq 1$  lar uchun

$\pi k \xi \neq \lambda_0 \xi + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  bo'lsa, u holda (1) masala yagona yechimga ega va bu yechim

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi k} \int_0^t f_k(\eta) \sin \pi k (t - \eta) d\eta + w_k(t) \right] \sin \pi k x \quad (4)$$

ko'rinishga ega.

Agar  $\left| \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} \right| \leq 1$  va  $\pi k \xi = \lambda_0 \xi + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  mavjud bo'lsa, hamda

tegishli ortogonallik shartlari bajarilgan bo'lsa, u holda (1) masala yechimi

$$w(x, t) = \sum_{k \notin K} \frac{\varphi_k^* (\cos \pi k (\xi - t) - \beta \cos \pi kt) - \psi_k^* \frac{1}{\pi k} (\sin \pi k (\xi - t) + \alpha \sin \pi kt)}{1 + \alpha\beta - (\alpha + \beta) \cos \pi k \xi} \sin \pi kx +$$

$$+ \sum_{k \in K} \left( a_k \cos \pi kt + b_k \frac{1}{\pi k} \sin \pi kt \right) \sin \pi kx$$

qator hamda uning  $x$  va  $t$  o'zgaruvchilar bo'yicha ikkinchi tartibli hosilalarining uzluksizligini ta'minlaydigan ixtiyoriy  $a_k$ ,  $b_k$   $k \in K$  koeffitsiyentlar bilan (17) ko'rinishga ega.

$$u(x, t) = \sum_{k \notin K} \left[ \frac{1}{\pi k} \int_0^t f_k(\eta) \sin \pi k (t - \eta) d\eta + w_k(t) \right] \sin \pi kx +$$

$$+ \sum_{k \in K} \left[ a_k \cos \pi kt + \frac{1}{\pi k} b_k \sin \pi kt \right] \sin \pi kx \quad (5)$$

bu yerda,

$$w_k(t) = \frac{\varphi_k^* (\cos \pi k (\xi - t) - \beta \cos \pi kt) - \psi_k^* \frac{1}{\pi k} (\sin \pi k (\xi - t) + \alpha \sin \pi kt)}{1 + \alpha\beta - (\alpha + \beta) \cos \pi k \xi}$$

#### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Lizama, C. Abstract Linear Fractional Evolution Equations. In Handbook of Fractional Calculus with Applications V. 2; Machado, J.A.T., Ed.; De Gruyter: Berlin, Germany; Munich, Germany; Boston, MA, USA, 2019; pp. 465–497. [CrossRef]
2. Liu, J.; Yamamoto, M. A backward problem for the time-fractional diffusion equation. Appl. Anal. 2010, 89, 1769–1788. [CrossRef]

3. Alimov, S.A.; Ashurov, R.R. On the Backward Problems in Time For Time-Fractional Subdiffusion Equations. Available online: <https://www.researchgate.net/publication/351575279> (accessed on 1 May 2021).
4. Ashurov, R.; Fayziev, Y. On the Nonlocal Problems in Time for Time-Fractional Subdiffusion Equations. *Fractal Fract.* 2022, 6, 41. <https://doi.org/10.3390/fractalfract6010041>.

**O‘ZGARUVCHAN KOEFFITSIYENTLI PARABOLIK TIPDAGI  
INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMA YADROSINING YAGONALIGI  
TO‘G‘RISIDA**

*Nuriddinov Javlon Zafarovich*

*Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston*

[j.zafarovich@mail.ru](mailto:j.zafarovich@mail.ru)

Ushbu ishda ko‘p o‘lchamli issiqlik o‘tkazuvchanlik integro-differensial tenglamasi uchun Koshi masalasi qaralgan.

$$u_t - a(t)\Delta_x u = \int_0^t k(x, t - \tau)u(x, y, \tau)d\tau, t \in (0, T], \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Bu yerda  $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  – Laplas operatori,  $y \in \mathbb{R}^n$  parametr,  $T$ -tayinlangan musbat o‘zgaruvchi son va  $a(t) > 0$  yetarlicha silliq funksiya. (1), (2) masalaning yechimi  $x = y$  da ma’lum bo‘lib,

$$u|_{x=y} = f(y, t), \quad (3)$$

bo‘lsa, (1) tenglamaning integral hadidagi  $k(x, t)$  (yadro)ni topish masalasini qaraymiz. Bu yerda barcha  $y \in \mathbb{R}^n$  va  $t \in [0, T]$  larda  $f(y, t)$ – berilgan funksiya.

Birinchi integral tenglamaning yadrosi  $k(x, t)$  quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lsin:

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^N c_i(x) b_i(t).$$

Faraz qilaylik  $k(x, t)$  va uning  $k_{x_i}, k_t, i = 1, 2$  hosilalari ixtiyoriy  $T > 0$  da  $B(D_T)$ ,  $[D_T := \{(x, t): x \in \mathbb{R}^2; 0 \leq t \leq T\}]$  sinfga qarashli,  $\varphi(x; y) \in B^4(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ .

Olib borilayotgan ko‘plab ilmiy va amaliy tadqiqotlar xususiy hosilali differensial va integro–differensial tenglamalar, ular uchun qo‘yilgan to‘g‘ri va teskari masalalarni o‘rganishga olib kelinadi [1]-[6]. Teskari masalalar astronomiyaga, kvantlarning tarqalishi nazariyasiga, geofizikaga, issiqlik fizikasiga hamda tibbiyotga kirib bordi. Matematik fizikada to‘g‘ri masalalarning yechimini topish uchun tenglamaning koeffitsiyentlarini, soha chegarasini, boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni berish lozim [7]. Ammo amaliyotda tenglama koeffitsiyentlarini har doim ham berib bo‘lmaydi. Har doim ham tadbqiqiy masalalarda boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni, shuningdek, soha chegarasini aniqlab bo‘lmaydi. Bunday hollarda, to‘g‘ri masala yechimiga nisbatan qo‘shimcha ma’lumot kiritib, teskari masala yechimini izlash, ya’ni koeffitsiyentlar, integro–differensial tenglama holda integral had yadrosini topish zarurati paydo bo‘ladi [1], [6], [7]. Bu kabi masalalarni yechish usullarining to‘la shakllanmaganligi bois integro–differensial issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasidan yadroni aniqlash teskari masalalarini yechish muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda. Ushbu maqolada integro–differensial issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasidan yadroni aniqlash teskari masalalarini yechimini yagonaligini ko‘rsatsik.

(1) va (2) Koshi masalasining yechimi Volterra tipidagi integral tenglamaga ekvivalent bo‘ladi. Buning uchun quyidagi formuladan foydalanamiz [6]:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) G(x - \xi; \theta(t)) d\xi +$$

$$+ \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi, \theta^{-1}(\tau)) G(x - \xi; \theta(t) - \tau) d\xi. \quad (4)$$

Bu yerda  $\theta(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$  va  $\theta^{-1}(t)$  funksiya  $\theta(t)$  funksiyaning teskari funksiyasi.

$$G(x - \xi; \theta(t) - \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi(\theta(t) - \tau)})^n} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(\theta(t) - \tau)}} \text{ esa } \frac{\partial}{\partial t} - a(t)\Delta \text{ o'zgaruvchan}$$

koeffitsiyentli differensial operatorining fundamental yechimi bo'lib, bu yerda

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n, |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Ushbu maqolaning asosiy natijasi quyidagi yagonalik teoremasi isbotlangan.

**Teorema.** Faraz qilaylik  $(t) \in C^1[0, T]$ ,  $\varphi(x, y) \in B^4(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $f(y, t) \in B^{2,2}(D_T)$ ,  $T > 0$  bo'lib,  $\varphi(y, y) = f(y, 0)$ ,  $a(0)\Delta_x \text{div}_y \varphi(y, y) = \text{div}_y f_t(y, 0)$  kelishuvchanlik shartlari hamda

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x, y)| \geq \beta_0 > 0,$$

shart bajarilsin, bu yerda  $\beta_0$  — ma'lum son. U holda, (1)-(3) teskari masalaning

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^N c_i(x) b_i(t), \quad c_i(x) \in B^2(\mathbb{R}^n), b_i(t) \in C^1([0, T])$$

ko'rinishdagi yadrosi  $D_T$  sohada bir qiymatli aniqlangan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Дурдиев Д.К., Рашидов А.Ш. Обратная Задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // Диф. уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 110-116.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. // Москва: Наука, 1967;
3. Prilepko A.I., Kostin A.B. On inverse problems of determining a coefficient in parabolic equation // Siberian Math. J., 1993. vol. 34. no. 5. pp. 923-937.

4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, Москва: Наука 1976;
5. Безнощенко Н. Я., Об определении коэффициента в параболическом уравнении, Дифференц. уравнения, 1974, том 10, номер 1, 24-35;
6. Durdiev D.K, Nuriddinov J.Z., On investigation of the inverse problem for a parabolic integrodifferential equation with a variable coefficient of thermal Conductivity // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. 2020, vol. 30, issue 4, pp. 572-584
7. Durdiev D.K, Nuriddinov J.Z., Determination of a Multidimensional Kernel in Some Parabolic Integro-differential Equation // Journal of Siberian Federal University. Mathematics physics 2021, 14(1), 117-127.

**KAPUTO MA'NOSIDAGI HOSILA VA RIMAN-LIUVILL MA'NOSIDAGI  
INTEGRALNI O'Z ICHIGA OLUVCHI YUKLANGAN ODDIY  
DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN BIR MASALA HAQIDA**

*Omonova D.D., Bozorova M.M.*

*Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston*

*[dinoraomonova707@gmail.com](mailto:dinoraomonova707@gmail.com), [madinaxonbozorova225@gmail.com](mailto:madinaxonbozorova225@gmail.com)*

So'ngi vaqtlarda noma'lum funksiyani biror qiymati qatnashgan differensial tenglamalar bilan shug'ullanishga bo'lgan qiziqish ortib bormoqda. Bunga sabab ko'plab issiqlik tarqalish va diffuziya jarayonlarini matematik modelini tuzish funksiyani biror qiymati qatnashgan differensial tenglama uchun qo'yiladigan masalalarga keltiriladi. Odatda, bunday turdagi tenglamalar yuklangan differensial tenglama deb yuritiladi. Shu sababdan biz ushbu ishda Kaputo ma'nosidagi hosila va Riman-Liuvill ma'nosidagi integralni o'z ichiga oluvchi yuklangan oddiy differensial tenglama uchun bir masalani tadqiq etamiz.

(0,1) oraliqda ushbu

$${}_c D_{0x}^\alpha y(x) - \lambda I_{0x}^\gamma y(x) = I_{0x_0}^\delta y(x_0) \quad (1)$$

kasr tartibli yuklangan oddiy differensial tenglamani qaraylik, bu yerda  $y(x)$ -noma'lum funksiya,  $\alpha, \lambda, \delta, x_0$ -o'zgarmas haqiqiy sonlar bo'lib,  $0 < \alpha < 1, \gamma > 0, 0 < x_0 < 1$ ,  ${}_c D_{0x}^\alpha y(x)$ -Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli hosilasi [1]

$${}_c D_{0x}^\alpha y(x) = I_{0x}^{1-\alpha} y'(x),$$

$I_{0x}^\alpha y(x)$  - Riman-Liuuill ma'nosida kasr tartibli integral [1]

$$I_{0x}^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y(t) dt.$$

**Masala.** (1) tenglamani va

$$y(0) = A \quad (2)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi  $y(x)$  funksiya topilsin, bu yerda,  $A$  - berilgan o'zgarmas haqiqiy son.

Ma'lumki [2],

$${}_c D_{0x}^\alpha y(x) - \lambda I_{0x}^\gamma y(x) = f(x)$$

tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y(x) = AE_{\alpha+\gamma,1}[\lambda x^{\alpha+\gamma}] + \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} E_{\alpha+\gamma,\alpha}[\lambda(x-z)^{\alpha+\gamma}] f(z) dz \quad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda  $E_{\gamma,\sigma}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma k + \sigma)}$  - Mittag-Leffler funksiyasi [1].

Bizning masalada  $f(x) = I_{0x_0}^\delta y(x_0)$  bo'lgani uchun (1) tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y(x) = AE_{\alpha+\gamma,1}[\lambda x^{\alpha+\gamma}] + x^{\alpha-1} E_{\alpha+\gamma,\alpha+1}[\lambda x^{\alpha+\gamma}] I_{0x_0}^\delta y(x_0) \quad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(4) ni har ikkala tarafini  $I_{0x}^\delta$  ni ta'sir ettirib yuboramiz va ba'zi hisoblashlarni amalga oshirib,

$$I_{0x}^\delta y(x) = Ax^\delta E_{\alpha+\gamma,\delta+1}[\lambda x^{\alpha+\gamma}] + x^{\delta-1} E_{\alpha+\gamma,\delta+1}[\lambda x^{\alpha+\gamma}] I_{0x_0}^\delta y(x_0) \quad (5)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(5) tenglikda  $x = x_0$  deb,  $I_{0x_0}^\delta y(x_0)$  ni

$$I_{0,x_0}^{\delta} y(x_0) = \frac{Ax_0^{\delta} E_{\alpha+\gamma,\delta+1} [\lambda x_0^{\alpha+\delta}]}{1 - x_0^{\delta-1} E_{\alpha+\gamma,\delta+1} [\lambda x_0^{\alpha+\gamma}]} \quad (6)$$

ko‘rinishda topamiz.

(6) ni (4) ga qo‘yib, masalaning yechimini

$$y(x) = AE_{\alpha+\gamma,1} [\lambda x^{\alpha+\gamma}] + \frac{Ax_0^{\delta} E_{\alpha+\gamma,\delta+1} [\lambda x_0^{\alpha+\delta}]}{1 - x_0^{\delta-1} E_{\alpha+\gamma,\delta+1} [\lambda x_0^{\alpha+\gamma}]} x^{\alpha-1} E_{\alpha+\gamma,\alpha+1} [\lambda x^{\alpha+\gamma}] \quad (7)$$

ko‘rinishda topamiz.

**Teorema.** Agar  $x_0^{\delta-1} E_{\alpha+\gamma,\delta+1} [\lambda x_0^{\alpha+\gamma}] \neq 1$  bo‘lsa, u holda masala yagona yechimga ega bo‘lib, u (7) formula bilan aniqlanadi.

### Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations (North-Holland Mathematics Studies, 204). Amsterdam: Elsevier, 2006.-523p.
2. Omonova D. D. Umumlashgan Hilfer ma’nosidagi hosila va Riman-Liuivill ma’nosidagi integralni o‘z ichiga oluvchi oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasi. O‘zbekistonda fanlararo innovatsiyalar va ilmiy tadqiqotlar jurnali. 18 - son. 2023. 371-376 betlar.

## KVAZICHIZIQLI ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA

*Raupova M.H.*

*Chirchiq davlat pedagogika universiteti, Chirchiq, O‘zbekiston*

*e-mail: [r.mokhinur@gmail.com](mailto:r.mokhinur@gmail.com)*

Xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining muhim va jadal rivojlanib borayotgan yo‘nalishlaridan biri ikkita buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalar sohasi hisoblanadi. Ikkinchi tomondan bu tenglamalarning

yechimlari mexanika, fizika va texnika masalalarida keng ko‘lamli tarzda tatbiq etilishi amaliyotda katta qiziqish uyg‘otadi.

Bitta va ikkita buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar A.S.Chaplin, K.I.Babenko, M.S.Saloxitdinov, T.D.Djuraev, T.Sh.Kalmenov, M.M.Smirnov va ularning o‘quvchilari tomonidan chuqur o‘rganilgan.

Ushbu maqolada  $\Omega$  sohasida ikkita buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan

$$|xy|^m(U_{xx} + \text{sign}yU_{yy}) + 2pyU_x + 2pxU_y = f(x, y, U), \quad (1)$$

$$2|p| \leq 1, m = \text{const} \geq 0$$

kvazichizikli tenglama uchun quyidagi chegaraviy masala o‘rganilgan:  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ , bunda  $\Omega_1$  sohasi  $y > 0$  joylashgan bo‘lib, uchlari  $O(0,0)$  va  $A(1,0)$  nuqtalarda bo‘lgan silliq  $G$  chiziq va  $Ox$  o‘qining  $OA$  kesmasi,  $\Omega_2$  sohasi  $y < 0$  da joylashgan bo‘lib,  $OA$  kesmasi,  $x + y = 0$  ( $OD$  ning tenglamasi),  $0 \leq x \leq 0,5$  va  $x - y = 1$  ( $DA$  ning tenglamasi)  $0,5 \leq x \leq 1$ ,  $\Omega_3$  sohasi  $y < 0$  da joylashgan bo‘lib,  $OD, x - y = 1$  ( $CD$  ning tenglamasi)  $0 \leq x \leq 0,5$  chizig‘i va  $Oy$  o‘qidagi  $OC$  kesmasi  $-1 \leq y \leq 0$  bilan chegaralangan.

**Ta’rif:** (1) tenglamani qanoatlantiruvchi  $U(x, y) \in C[\bar{\Omega}] \cap C^2[\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3]$  funksiyaga tenglamaning regulyar yechimi deb ataladi.

**Chegaraviy masala:** (1) tenglamani quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimini toping: 1)  $U|_G = \varphi(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ ; 2)  $L : -G$  egri chizig‘ining  $A$  nuqtadan boshlab o‘lchangan uzunligi,  $U(0, y) = \tau(y)$ ,  $-1 \leq y \leq 0$ ; birikish shartlari:

$$U(x, +0) = U(x, -0), 0 \leq x \leq 1, \lim_{y \rightarrow +0} y^{2p} U_y = \beta \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2p} U_y, 0 < x < 1,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -0} U(\xi, \eta) = A(\eta) \lim_{\xi \rightarrow +0} U(\xi, \eta), \lim_{\xi \rightarrow -0} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\eta}^{\xi} (\xi - t)^{-\lambda} U(t, \eta) dt =$$

$$= B(\eta) \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\eta}^{\xi} (\xi - t)^{-\lambda} U(t, \eta) dt,$$

bunda  $\xi = x + y$ ,  $\eta = x - y$ ,  $0 < \eta < 1$ ,  $\beta, \lambda \in R$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

Masala singulyar integral tenglamaga keltirilib, keyin Karleman usulini qo'llaniladi va Fredholm integral tenglamasiga olib kelinadi. Berilgan  $\varphi(s)$ ,  $\tau(y)$ ,  $A(\eta)$ ,  $B(\eta)$ ,  $f(x, y, U)$  funksiyalarga aniq shartlar qo'yilib, chegaraviy masalani yagona yechimga ega bo'lishi isbotlangan.

### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. Салахитдинов М.С., Расулов Х.Р. Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа. ДАН РУ, 1996 г., №4, с.3-7.
2. Расулов Х.Р. Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. ДАН РУ, 1996 г., №12, с.12-16.
3. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
4. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

### INTEGRATION OF THE LOADED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION VIA INVERSE SCATTERING METHOD

*A.A. Reyimberganov, N.A. Matchonov*

*Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*

*[matchonovnumonjon248@gmail.com](mailto:matchonovnumonjon248@gmail.com)*

Nonlinear Schrodinger equation has an important physical applications. Therefore, it is always interesting to find the solutions of the nonlinear Schrodinger

equation. There are several methods to find solutions to nonlinear equations: Hirota direct method [1],[2], the binary Darboux transformations [3], (G'/G) - expansion method [4], [5], inverse scattering method [6]-[9]. In 1972, the inverse scattering transform method was first proposed by Zakharov and Shabat [10] for solving the Cauchy problem for the nonlinear Schrodinger equation.

We consider the loaded nonlinear Schrodinger equation of the following problem

$$iu_t + 2|u|^2 u + u_{xx} - i\gamma(t)(u(0,t) + u^*(0,t))u_x = 0, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad (2)$$

where  $\gamma(t)$  is bounded continuous non-zero real function, the real function  $u_0(x)$  satisfy the following properties:

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u_0(x)|dx < \infty$ ;

2. The equation

$$L(0)\varphi \equiv i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0^*(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad x \in R$$

can have  $N$  number of simple eigenvalues and does not have spectral singularities. Here, the function  $u_0^*(x)$  is a complex conjugation of  $u_0(x)$ .

We deal with finding concerning solution of the loaded nonlinear Schrödinger equation in the following class

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( (1+|x|)|u_0(x)| + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| \right) dx < \infty, t \geq 0, \quad (3)$$

via inverse scattering problem.

The function  $u(x,t)$  be the solution of the problem (1) - (3). Consider operator  $L(t)$  with potentials  $u(x,t)$

$$L(t)\varphi \equiv i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x,t) \\ -u^*(x,t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \xi \varphi. \quad (4)$$

If the potential  $u(x,t)$  in the system of equations (4) depends on  $t$ , then its solution  $\varphi$  must also depend on  $t$ .

**Theorem.** If the function  $u(x,t)$  is a solution the problem (1) - (3), then the scattering data of the system (4) with the function  $u(x,t)$  depend on  $t$  as follows:

$$\frac{dr^+}{dt} = \left( 4i\xi^2 - 2\xi\gamma(t)(u(0,t) + u^*(0,t)) \right) r^+, \quad \text{Im } \xi = 0,$$

$$\frac{dC_n}{dt} = \left( 4i\xi_n^2 + 2i\xi_n\gamma(t)(u(0,t) + u^*(0,t)) \right) C_n,$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N.$$

The obtained relations determine completely the evolution of the scattering data for the system (4), which allows us to find the solution of the problem (1)-(3) by using the inverse scattering problem method.

### LIST OF USED LITERATURES

1. Zhang D. J. The N-soliton solutions for the modified KdV equation with self-consistent sources. J. Phys.Soc. Japan, 71, 2002, pp. 2649–2656.
2. Reyimberganov A. A., Rakhimov I. D. The Soliton Solutions for the Nonlinear Schrodinger Equation with Self-consistent Sources. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 35, 2021, pp. 84–94.
3. Rogers C., Shadwick W.F. Backlund Transformations, Academic Press, New York, 1982
4. Zhang S., Tong J.-L., Wang W. A generalized (G'/G)-expansion method for the mKdV equation with variable coefficients. Physics Letters A, 372, 2008, pp. 2254–2257.

5. Wang M, Li X, Zhang J. The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Phys Lett A*, 372, 2008, pp. 417–423.
6. Lin R. L., Zeng Y. B., Ma W. X. Solving the KdV hierarchy with self-consistent sources by inverse scattering method. *Physica A*, 291, 2001, pp. 287–298.
7. Urazboev G. U., Khasanov A. B. Integrating the Korteweg-de Vriese equation with a self consistent source and "steplike" initial data. *Theor. Math. Phys.*, 129, 2001, pp. 1341–1356.
8. Khasanov A. B., Urazboev G. U. On the sine-Gordon equation with a self-consistent source. *Matematicheskie Trudy*, 11(1), 2008, pp. 153–166.
9. Khasanov A. B., Reyimberganov A. A. About the finite density solution of the higher nonlinear Schrodinger equation with self-consistent source. *Ufmsk. Mat. Zh.* 1, 2009, pp. 133-143
10. Zakharov V. E., Shabat A. B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional selfmodulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34, 1972, pp. 62–69.

## PSEVDOGIPERBOLIK TENGLAMALAR UCHUN CHIZIQLI TESKARI MASALALAR.

*Saidova N.M*

*Buxoro davlat universiteti*

*nilufarsaidova93@gmail.com*

Quyidagi (1) tenglamani qanoatlantiruvchi  $\{u(x,t), f(t)\}$  funksiyalar juftligini qaraymiz

$$Lu = u_{tt} - u_{xxt} - u_{xx} = f(t)g(x) + r(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T \quad (1)$$

boshlang'ich shartlar

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

Bu yerda  $\Omega_T = \{(x, t) | x \in R, 0 < t \leq T\}$ ,  $f, r, g, \varphi, \psi$  berilgan funksiyalar.

**Ta'rif.** Agar quyidagi:

1.  $u(x,t)$  funksiya berilgan sohada ikkinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz,
  2.  $u(x,t)$  funksiya (1) tenglamani qanoatlantirsin,
  3.  $u(x,t)$  (2) va (3) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsa,
- $u(x,t)$  funksiyaga (1)-(3) masalaning klassik yechimi deyiladi.

**Teorema.**  $g \in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T)$ ,  $r \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_T)$  va  $\varphi, \psi \in H^{2+\alpha}(R)$ ,  $v \in H^{2+\alpha}([0, T])$  bo'lib,  $\varphi(0)=v(0)$ ,  $\psi(0) = v'(0)$  kelishuvchanlik shartlari bajarilsin, u holda (1) - (3) masalaning yagona yechimi mavjud bo'ladi.

#### Foydalanilgan adabiyotlar

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 291 с.
2. Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач [Текст] /А.Л.Бухгейм. Новосибирск: Наука, 1988. 183 с.
- 3.Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи [Текст] / С.И. Кабанихин.– Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
4. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа /М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, С.П.Шишатский. М.: Наука, 1980. 288 с.
5. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В.Г. Романов. М.: Наука, 1984. 254 с.
- 6.Чудновский А.Ф. Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976. 352 с.
- 7.Yu.Ya.Belov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Utrecht, VSP, 2002.
8. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin U.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marcelker, 1999. 709 p.

**DIFFERENTIAL GAME IN THE CASE OF  $l$ -CATCH UNDER NON-  
STATIONARY GEOMETRIC CONSTRAINTS ON CONTROLS.**

*Samatov Bahrom Tadjiahmatovich*

*Dr Sc, professor, V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

*samatov57@gmail.com*

*Turgunboeva Mohisanam Akhmadullo kizi*

*student of PhD, Namangan State University, Namangan, Uzbekistan*

*turgunboyevamohisanam95@gmail.com*

We investigate a differential game with two controllable objects, namely the Pursuer (in brief P) and the Evader (in brief E), in the finite dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ . Assume that the vectors  $x$  and  $y$  functions as Pursuer's and Evader's location, by the same taken, vectors  $u$  and  $v$  acts as Pursuer's and Evader's control parameters respectively in that space. Let, in this consideration, the motion dynamics of  $P$  and  $E$  be described by the differential equations

$$P: \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$E: \quad \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0 \quad (2)$$

correspondingly, where  $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ;  $x_0, y_0$  are players' initial locations which are reckoned  $|x_0 - y_0| > l$ ,  $l > 0$  of the players for which it is presumed that  $|x_0 - y_0| > l$ , for some  $l > 0$  at the time  $t = 0$ . The controls  $u$  and  $v$  considered as players' velocity vectors which are required to become measurable functions  $u(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $v(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  obeying to the *geometric constraints* (for brevity, *G-constraints*)

$$|u(t)| \leq \rho_1 t + \rho_2 c h t \text{ for almost every } t \geq 0, \quad (3)$$

$$|v(t)| \leq \sigma_1 t + \sigma_2 s h t \text{ for almost every } t \geq 0, \quad (4)$$

where  $\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2$  are the given positive parametric numbers. It is worth noting that as the norms of  $u(\cdot)$  and  $v(\cdot)$  in (3) and (4) we refer to the Euclidean norms in the form

$$|u(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2(t)}, \quad |v(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2(t)}.$$

Let  $U_{\rho_1, \rho_2}$  stand for the family of all measurable functions corresponding to (3). Similarly, let the family of all measurable functions satisfying (4) be represented by  $V_{\sigma_1, \sigma_2}$ .

If  $u(\cdot) \in U_{\rho_1, \rho_2}$  and  $v(\cdot) \in V_{\sigma_1, \sigma_2}$ , then the solutions to Cauchy's problems (1) and (2) are

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t v(s) ds$$

and the pairs  $(x_0, u(\cdot))$  and  $(y_0, v(\cdot))$  generate the motion trajectories of the player  $P$  and  $E$  appropriately.

The main target of the player  $P$  is to gain ground the player  $E$  at the distance  $l > 0$  ( $l$ -catch problem), i.e., to achieve the relation

$$|x(\theta) - y(\theta)| \leq l \tag{5}$$

at some finite time  $\theta > 0$ . Whereas the objective of the player  $E$  is to avoid the occurrence of (5), i.e., to keep the inequality  $|x(t) - y(t)| > l$  for all  $t \geq 0$  or, if it is impossible, to put off the time of the occurred of (5).

We will introduce the following denotations for the sake of convenience:

$$z(t) = x - y, \quad z_0 = x_0 - y_0.$$

And we come to the unique Cauchy problem  $\dot{z} = u - v, \quad z(0) = z_0$ . (6)

Now we define a strategy for  $P$  on the basis of the works [1, p-31-38; 2;].

**Definition 1.** [4, p-907-921] For  $\rho_1 \geq \sigma_1, \rho_2 \geq \sigma_2$  we call the function

$$\mathbf{u}(z_0, t, v) = v + \lambda(z_0, t, v)(m(z_0, t, v) - z_0) \quad (7)$$

the *Pursuer's strategy* or  $\Pi_l$ -*strategy* in the differential game (1)-

(4), where

$$\lambda(v, z_0) = \frac{1}{|z_0|^2 - l^2} \left[ \langle v, z_0 \rangle + \varphi(t)l + \sqrt{(\langle v, z_0 \rangle + \varphi(t)l)^2 + (|z_0|^2 - l^2)(\varphi^2(t) - |v|^2)} \right],$$

$$\varphi(t) = \rho_1 t + \rho_2 c h t, \quad m(z_0, t, v) = -\frac{v - \lambda(z_0, t, v)z_0}{|v - \lambda(z_0, t, v)z_0|} l.$$

Here  $\langle v, z_0 \rangle$  is scalar product of the vectors  $v$  and  $z_0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Moreover, the function  $\lambda(z_0, t, v)$  is usually called the *resolving function*.

**Theorem.** If one of the following conditions holds in differential game (1) – (4), that is, 1.  $\rho_1 = \sigma_1, \rho_2 > \sigma_2$  or 2.  $\rho_1 > \sigma_1, \rho_2 = \sigma_2$  or 3.  $\rho_1 > \sigma_1, \rho_2 > \sigma_2$ , then  $\Pi_l$ -strategy (7) guarantees to occur  $l$ -catch in (1)-(4) differential game.

### References

- 1.L.A. Petrosyan, V.G. Dutkevich, *Games with "a Survival Zone", Occasion L-catch* (in Russian), Vestnic Leningrad State Univ., 1969, 3(13), 31-38.
- 2.A.A. Chikrii, *Conflict-Controlled Processes*, Dordrecht; Kluwer, 1997.
- 3.A.S. Bannikov, N.N. Petrov, *Linear non-stationary differential pursuit games with several evaders*, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh.Komp.Nauki, 2014, 78(3), 3-12.
- 4.B.T. Samatov, *Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players II*, Cybernetics and Systems Analysis, 2013, 49(6), 907-921.
- 5.B.T. Samatov, M.A. Horilov, A.Kh. Akbarov, *Differential game: "Lifeline" for Non-Stationary Geometric Constraints On Controls*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, 43(1), 237-248.

# BOSHQARUVLARI NOSTATSIONAR GEOMETRIK CHEGARALANISHLI HOL UCHUN QUVISH-QOCHISH MASALASI

<sup>1</sup>Samatov B.T., <sup>2</sup>Xolmirzayeva G.I.

<sup>1</sup>Namangan davlat universiteti, Namangan, O'zbekiston

<sup>2</sup>Andijon davlat universiteti, Andijon, O'zbekiston

[samatov57@inbox.ru](mailto:samatov57@inbox.ru), [xolmirzayeva1991@mail.ru](mailto:xolmirzayeva1991@mail.ru)

$R^n$  fazoda qarama-qarshi maqsadli ob'ektlar  $P$  - quvlovchi va  $E$  - qochuvchi harakatlanayotgan bo'lishsin. Quvlovchi va qochuvchining fazodagi holatlarini mos ravishda  $x$  va  $y$  orqali belgilaymiz. Ularning harakatlari quyidagi boshqariluvchi differensial tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$P: \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$E: \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

bu yerda  $x, y, u, v, x_0, y_0 \in R^n$ ,  $n \geq 2$ ;  $x_0, y_0$  nuqtalar mos ravishda quvlovchi va qochuvchining  $t=0$  vaqtdagi boshlang'ich vaziyatlari,  $x_0 \neq y_0$  deb qaraymiz. Shuningdek,  $u$  va  $v$  parametrlar ob'ektlarning boshqaruv parametrlari hisoblanadi.

Quvlovchining  $u$  boshqaruv parametri  $u(\cdot): [0; +\infty) \rightarrow R^n$  akslantirishni bajaruvchi  $t$  bo'yicha o'lchovli funksiya sifatida tanlanadi va quyidagi chegaralanishni qanoatlantirishi talab etiladi

$$|u(t)| \leq \alpha_1 t + \alpha_2 e^{-t}, \quad \text{deyarli barcha } t \geq 0, \quad (3)$$

bu yerda  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ . Bu yerda (3) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha  $u(\cdot)$  o'lchovli funksiyalar sinfini  $U_G$  bilan belgilaymiz.

Qochuvchining  $v$  boshqaruv parametri  $v(\cdot): [0; +\infty) \rightarrow R^n$  akslantirishni bajaruvchi  $t$  bo'yicha o'lchovli funksiya sifatida tanlanadi va quyidagi chegaralanishni qanoatlantirishi talab etiladi:

$$|v(t)| \leq \beta_1 t + \beta_2 e^{-t}, \quad \text{deyarli barcha } t \geq 0, \quad (4)$$

bu yerda  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 > 0$ . Bunda (4) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha  $v(\cdot)$  o'lovchi funksiyalar sinfini  $V_G$  bilan belgilaymiz.

**Ta'rif 1.** Tanlangan  $u(\cdot) \in U_G$  va  $v(\cdot) \in V_G$  boshqaruv funksiyalar uchun (1) va (2) tenglamalardan hosil bo'lgan quyidagi ifodalar mos ravishda quvlovchi va qochuvchining harakat trayektoriyasi deyiladi:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds, \quad (5)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(s) ds. \quad (6)$$

(1)-(4) differensial o'yinda quvuvchining ob'ekt  $P$  maqsadi biror chekli vaqtda  $x(t)=y(t)$  tenglikka erishish bo'lsa (**tutish masalasi**), qochuvchi ob'ekt  $E$  ning maqsadi  $x(t) \neq y(t)$  tengsizlikni ixtiyoriy  $t \geq 0$  uchun o'rinli bo'lishini ta'minlash (**qochish masalasi**).

**Ta'rif 2.** (1)-(4) differensial o'yin uchun quyidagi

$$u_G(t, v) = v - \lambda_G(t, v) \xi_0 \quad (7)$$

funksiyaga  $P$  quvlovchining parallel quvish strategiyasi ( $\Pi$ -strategiya) deb ataymiz,

bu yerda  $\lambda_G(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + (\alpha_1 t + \alpha_2 e^{-t})^2 - |v|^2}$ ,  $\xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}$ ,

$z_0 = x_0 - y_0$ ,  $\langle v, \xi_0 \rangle - v$  va  $\xi_0$  vektorlarning  $R^n$  fazodagi skalyar ko'paytmasi.

**Teorema 1.** Agar quyidagi shartlardan biri o'rinli bo'lsa, ya'ni

a)  $\alpha_1 = \beta_1$ ,  $\alpha_2 > \beta_2$ ; b)  $\alpha_2 = \beta_2$ ,  $\alpha_1 > \beta_1$ ; c)  $\alpha_1 > \beta_1$ ,  $\alpha_2 > \beta_2$ ,

u holda (7) strategiya yordamida tutish masalasi  $[0, T_*]$  vaqt oralig'ida yechimga ega bo'ladi, bu yerda  $T_*$  vaqt  $F(t) = 0$  tenglamaning birinchi musbat ildizi va

$$F(t) = (\alpha_2 - \beta_2)(e^{-t} - 1) - \frac{(\alpha_1 - \beta_1)}{2} t^2 + |z_0|.$$

**Ta'rif 3.** (1)-(4) differensial o'ynida

$$v^*(t) = -(\beta_1 t + \beta_2 e^{-t}) \xi_0 \quad t \geq 0 \quad (8)$$

funksiyaga qochuvchining strategiyasi deb ataymiz.

**Teorema 2.** Agar  $\alpha_1 \leq \beta_1$ ,  $\alpha_2 \leq \beta_2$  shartlar bajarilsa, u holda (1)–(4) differensial o‘yinida (8) strategiya yordamida qochish masalasi yechimga ega bo‘ladi.

*FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR*

1. Isaacs R. Differential games. John Wiley and Sons, New York. 1965, 340 p.
2. Pontryagin L.S. Selected Works. MAKS Press, Moscow. 2014, 551 p.
3. Krasovsky N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. Springer, New York. 1988, 517 p.
4. Azamov A.A., Samatov B.T. The II-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management. St. Petersburg: Leningrad. Univ. June 28-30, 2010, pp. 33-47.
5. Satimov N.Yu. Methods for Solving the Pursuit Problem in the Theory of Differential Games. Izd-vo NUUZ, Tashkent, 2003.
6. Ibragimov G.I. Differential multi-person game with integral constraints for controls of the players. Izv. Vuzov, Matematika, 2004, No. 4, pp. 48-52.
7. Samatov B.T., Horilov M.A., Akbarov A.Kh. Differential games with non-stationary geometric constraints on controls. Lobachevskii Journal of Mathematics. Pleiades Publishing, 2022, Vol. 43, No. 1, pp 237-248.
8. Samatov B.T., Soyibboev U.B. Differential game with a lifeline for the inertial movements of players. Ural Mathematical Journal, 2021, Vol. 7, No.2, pp.94-109.

**NOKLASSIK CHEGARAVIY MASALA UCHUN BIORTOGONAL SISTEMA**

*D.Sh. Toshmatov*

*Jizzax davlat pedagogika universiteti, Jizzax, O‘zbekiston*

Kasr tartibli diffuziya-to‘lqin tenglamasi berilgan bo‘lsin:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) + q(x)f(x, t), \quad x \in (0, l), t \in (0, T] \quad (1)$$

boshlang'ich va nolokal chegaraviy shartlar bilan

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3)$$

Bu yerda  $0 < \alpha < 1$ ,  $\partial_t^\alpha - \alpha$  tartibli Gerasimov-Kaputo ma'nosidagi kasr hosila, va  $u$   $v(t) \in AC[0, T]$  lar uchun quyidagicha aniqlangan

$$\partial_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{v'(s)}{(t-s)^\alpha} ds$$

va  $f(x, t)$  berilgan manba hadi,  $\varphi(x)$  boshlang'ich harorat.

$$\int_0^l \omega(x)u(x, t)dx = g(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

Berilgan qo'shimcha shart bo'lib, bu yerda  $g(t)$  berilgan berilgan issiqlik energiyasi,  $\omega(x)$  berilgan funksiya. Ishning asosiy maqsadi (1)-(4) masaldan  $q(x)$  funksiyani topishdan iborat.

### *References*

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

## **DIRECT PROBLEM FOR FRACTIONAL WAVE EQUATION WITH RIEMANN LIOUVILLE DERIVATIVE**

*Turdiyev Halim Hamroyevich<sup>1</sup>, Xoliqov Suyunjon Xamroqul og'li<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Bukhara State University, Department of "Differential Equations"*

<sup>2</sup>*Navoi State Pedagogical Institute, Department of Mathematics*

*E-mail: [hturdiyev@mail.ru](mailto:hturdiyev@mail.ru)*

In the domain  $\Omega_T := \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  consider the time-fractional diffusion wave equation

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x, t) - u_{xx} + q(t)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T \quad (1)$$

with initial and boundary conditions

$$(D_{0+,t}^{\alpha-1} u)_{t=0+} = \varphi(x), \quad (D_{0+,t}^{\alpha-2} u)_{t=0+} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

where  $\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha$  is the Riemann-Liouville fractional derivative of order  $1 < \alpha < 2$  in the time variable (see definition 1, 2 in [1]-[6]) and  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $f(x,t)$  are given smooth functions.

The functions  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $f(x,t)$  satisfy the following assumptions

A1)  $\{\varphi, \psi\} \in C^3[0, l]$ ,  $\{\varphi^{(4)}, \psi^{(4)}\} \in L_2[0, l]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ,  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ ,  $\psi''(0) = \psi''(l) = 0$ ;

A2)  $f(x, \cdot) \in C[0, T]$  and for  $t \in [0, T]$ ,  $f(\cdot, t) \in C^3[0, l]$ ,  $f^{(4)}(\cdot, t) \in L_2[0, l]$ ,  $f(0, t) = f(l, t) = 0$ ,  $f_{xx}(0, t) = f_{xx}(l, t) = 0$ ;

We obtain the following assertion.

**Theorem.** Let  $q(t) \in C[0, T]$ , A1), A2) are satisfied, then there exists a unique solution of the direct problem (1)-(3)  $u(x, t) \in C_\gamma^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ,

where

$$C_\gamma^{2,\alpha}(\Omega_T) = \{u(x, t): u(\cdot, t) \in C^2(0,1); t \in [0, T] \text{ and} \\ \mathcal{D}_{0+,t}^\alpha u(x, \cdot) \in C_\gamma(0, T); x \in [0,1], 1 < \alpha < 2\},$$

### **REFERENCES**

1. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. "Theory and Applications of Fractional Differential Equations". Elsevier, Amsterdam-Tokyo, (2006).
2. Hilfer R., Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore (2000).
3. Sorrentinos G. "Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behavior of polymeric beams". in Proceedings of IMAS, Saint Louis, Mo, USA. 2006.
4. Kilbas, A.A., Bonilla, B., and Trujillo, J.J., "Existence and uniqueness theorems for nonlinear fractional differential equations". Demonstr. Math., 33(2.3), (2000) 583-602.
5. Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., "Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications". New York and London, Gordon and Breach Science Publishers (1993).

6. Kilbas A.A., Trujillo J.J., "Differential equations of fractional order: methods, results and problems - I". Appl. Anal., 78 (2001), No.3-4, 153-192.

**A GENERALIZED  $(G'/G)$  - EXPANSION METHOD FOR THE LOADED SHALLOW WATER WAVE EQUATION**

*G.U.Urazboev<sup>1,2</sup>, M. M. Khasanov<sup>1</sup>, O.Y.Ganjaev<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup>Urgench state university, Urgench, Uzbekistan,*

*<sup>2</sup>Institute of Mathematics named after V.I. Romanovski Uzbekistan Academy of Science*

*[hmuzaffar@mail.ru](mailto:hmuzaffar@mail.ru)*

This paper is dedicated to find the solutions of the equation of the loaded shallow water wave equation. It is shown that  $(G'/G)$  - expansion method is one of the most effective way of finding the solutions.

Consider the following loaded shallow water wave equation

$$u_{xxx} + \alpha u_x u_{xt} + \beta u_t u_{xx} - u_{xt} - \gamma u_{xx} + f(t)u(0,t)u_{xx} = 0, \tag{1}$$

where  $u(x,t)$  is an unknown function,  $x \in R$ ,  $t \geq 0$ ,  $f(t)$  - is the given real continuous function.

**Description of the generalized  $(G'/G)$ -expansion method**

Let us given a nonlinear partial differential equation in the following form

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0 \tag{2}$$

with two independent variables  $x$  and  $t$ . Besides,  $u = u(x,t)$  is a unknown function,  $F$  is a polynomial in  $u$  and its partial derivatives in which the highest order derivatives and nonlinear terms are involved. Now we give the main steps of the  $(G'/G)$ -expansion method [3]:

**Step 1.** We find the solution  $u$  in the following form:

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - \Omega(t), \tag{3}$$

where  $\Omega(t)$  is a continuous function dependent on  $t$ . We reduce equation (2) to the following nonlinear ordinary differential equation:

$$P(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (4)$$

where  $P$  is a polynomial of  $u(\xi)$  and its all derivatives  $u' = du(\xi)/d\xi$ ,  $u'' = d^2u(\xi)/d\xi^2$ ,

**Step 2.** We assume that the solution of equation (4) has the form:

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^m a_j \left( \frac{G'}{G} \right)^j, \quad (5)$$

where  $G = G(\xi)$  satisfies the following second order ordinary differential equation

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \quad (6)$$

where  $G' = dG(\xi)/d\xi$ ,  $G'' = d^2G(\xi)/d\xi^2$  and  $\lambda, \mu, a_j (j=1,2,\dots,m)$  are constants that can be determined later, provided  $a_m \neq 0$ .

**Step 3.** We determine the integer number  $m$  by balancing the nonlinear terms of the highest order and the partial product of the highest order of (4).

**Step 4.** Substitute (5) along with (6) into (4) and collect all terms with the same order of  $\left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$ , the left-hand side of (4) is converted into a polynomial in  $\left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$ . Then,

equating each coefficient of this polynomial to zero we derive a set of over-determined partial differential equations for  $a_j (j=1,2,\dots,m)$  and  $\xi$ .

**Step 5.** Substituting the values  $a_j (j=1,2,\dots,m)$  and  $\xi$  as well as the solutions of equation (6) into (5), we have the exact solutions of equation (2).

## REFERENCES

1. A. Bekir, Application of the  $(G'/G)$ -expansion method for nonlinear evolution equations, Phys. Lett. A, 372, 3400 (2008).
2. S. Zhang, J. L. Tong, W. Wang, A generalized  $(G'/G)$ -expansion method for the mKdV equation with variable coefficients, Phys. Lett. A, 372, 2254 (2008).

3. M. Wang, X. Li, J. Zhang, The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *PhysLett. A.*, 372, 417 (2008).
4. Urazboev G.U., Baltaeva I.I., Rakhimov I.D. A generalized  $(G'/G)$ -expansion method for the loaded Korteweg-de Vries equation. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2021, vol. 24, p. 139. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.410>(in Russian)
5. Baltaeva I. I., Rakhimov I. D., Khasanov M. M. Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg-de Vries Equation. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 85–95.

## BIR INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA

*Yusubjonova.G.*

*Namangan davlat universiteti, Namangan, O'zbekiston*

*E-mail: prettychiroy@gmail.com*

Quyidagi

$${}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}u(t,x) + \mu {}_{CF}D_{0t}^{\alpha}u(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x) \quad (1)$$

integro-differensial tenglamani  $\Omega = \{(t,x): 0 < x < 1, 0 < t < 1\}$  sohada qaraymiz. Bu yerda

$${}_{CF}D_{0t}^{\alpha}y(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t y'(s)e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)}, 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

- Kaputo-Fabritsiyo operatori va bu operator uchun

$${}_{CF}D_{0t}^{\alpha+n}y(t) = {}_{CF}D_{0t}^{\alpha}({}_{CF}D_{0t}^n y(t)), n \in \mathbb{N}$$

tenglik o'rinli [1],  $\mu$  -berilgan haqiqiy son,  $f(x,t)$  esa berilgan yetarlicha silliq funksiya.

**Masala.** (1) tenglamaning  $\Omega$  sohadagi

$$u(0,x)=u(1,x)=0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

$$u(t,0)=u(t,1)=0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimi topilsin.

Ushbu masalani o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan tatqiq etamiz [2].

Buning uchun  $f(t,x) \equiv 0$  holatda (1) tenglamaning trivial bo'lmagan yechimini

$U(t,x) = X(x)T(t)$  ko'rinishida izlaymiz. U holda

$${}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}U(t,x) + \mu \cdot {}_{CF}D_{0t}^{\alpha}U(t,x) - U_{xx}(t,x) = 0$$

tenglamadan

$$X(x) {}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}T(t) + \mu \cdot X(x) {}_{CF}D_{0t}^{\alpha}T(t) - X''(x)T(t) = 0$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikni  $X(x)T(t) \neq 0$  ga bo'lib

$$\frac{{}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}T(t) + \mu \cdot {}_{CF}D_{0t}^{\alpha}T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (5)$$

ni hosil qilamiz. Bundan kelib chiqadigan  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  tenglama va (4)

shartdan kelib chiqadigan  $X(0)=X(1)=0$  shartlar birgalikda Shgurm-Liuivill spektral

masalasini tashkil etadi. Bu masala  $\lambda_n = (n\pi)^2, n \in \mathbb{Z}$  qiymatlarda  $X_n(x) = \sin n\pi x$  xos

funksiyalarga ega bo'ladi [2]. Bu xos funksiyalar sistemasi  $L_2$  fazoda to'la ortonormal

sistema tashkil etadi. Shu sababdan, (1),(3),(4) masalaning yechimini

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin n\pi x \quad (6)$$

ko'rinishida izlaymiz.

Berilgan funksiya  $f(t,x)$  ni ham (6) kabi qatorga yoyib olamiz:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin n\pi x, \quad (7)$$

bu yerda  $f_n(t,x) = 2 \int_0^1 f(t,x) \sin n\pi x dx$ . (6) va (7) ni (1) ga qo'ysak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}U_n(t)\sin n\pi x + \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} {}_{CF}D_{0t}^{\alpha}U_n(t)\sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 U_n(t)\sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin n\pi x$$

ni olamiz. Bu yerdan esa,

$${}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}U_n(t) + \mu {}_{CF}D_{0t}^{\alpha}U_n(t) + (n\pi)^2 U_n(t) = f_n(t) \quad (8)$$

tenglamani olamiz. (3) shartdan esa  $U_n(0) = U_n(1) = 0$  shartlar kelib chiqadi. (8)

tenglamaning bu shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi  $A^2(\alpha) = 4B(\alpha)$  holda quyidagi ko'rinishida yoziladi [3]:

$$U_n(t) = e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}t} \int_0^1 \hat{f}_n(s)G(t,s)ds, \quad (9)$$

Bu yerda

$$U_n(t) = e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}t} \int_0^1 \hat{f}_n(s)G(t,s) = \begin{cases} e^{\frac{A(\alpha)}{2}(t-s)} t(s-1), 0 \leq t \leq s, \\ e^{\frac{A(\alpha)}{2}(t-s)} s(t-1), s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$A(\alpha) = \frac{2\alpha}{1-\alpha} + \mu + (n\pi)^2(1-\alpha), \quad B(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} - \mu \right],$$

$$\hat{f}(t) = (1-\alpha)e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}t} \left[ f'_n(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha} f_n(t) \right].$$

Qayd etish kerakki, (8) integro-differensial tenglama avval koeffitsiyentlari  $\alpha$  tartibga bog'liq tenglamaga keltiriladi. So'ngra bu tenglama tegishi chegaraviy shartlar asosida Grin funksiyasi yordamida (9) formula beriladi. (9) ni hisobga olsak, (6) ni

$$U_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}t} \int_0^1 \hat{f}_n(s)G(t,s)ds \sin \pi x \quad (10)$$

ko'rinishida yozish mumkin. (10) va  $U_{xx}(t,x), {}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}U(t,x)$  funksiyalarga mos keluvchi chekli qatorlarning tekis yaqinlashishini isbotlash uchun berilgan funksiya  $f(t,x)$  kerakli shartlar qo'yiladi. Xususan, (10) qatorning tekis yaqinlashishi uchun

$$f(t,x) \in C(\bar{\Omega}), \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega) \text{ ekanligi yetarlidir.}$$

Demak, quyidagi tasdiq o'rinli:

**Teorema.** Agar  $A^2(\alpha) = 4B(\alpha)$  va  $f(t, x) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\frac{\partial^3 f(t, x)}{\partial t \partial x^2} \in C(\Omega)$  bo'lsa, u holda (1),(3),(4) masalaning yechimi mavjud, yagona va (10) ko'rinishidan ifodalanadi.

### Foydalanilgan adabiyotlar

1. M.Caputo, M.Fabrizio. A new definition of fractional derivative without singular kernel. Progr.Frac.Differ.Appl. 2015, №1, pp.1-13.
2. M.Salohiddinov. Matematika-fizika tenglamalari. O'qituvchi, 2002 y.
3. G.Yusubjonova. Koeffitsiyenti tenglama tartibiga bog'liq differensial tenglama uchun bir chegaraviy masala haqida. "Yosh matematiklarning yangi teoremlari-2022" ilmiy anjumani to'plami. Namangan. 13-14-may, 2022.

## HILFER MA'NOSIDAGI KASR TARTIBLI DIFFRENSIAL TENGLAMANI DUYAMEL PRINSIPI YORDAMIDA YECHISH

*Xusainov X.Y.*

*Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston  
hikmathusainov93@gmail.com*

[1]da Riman-Liuvil va Kaputo ma'nosidagi kasr hosilalarining umumlashmasi bo'lgan Hilfer ma'nosidagi kasr hosilali differensial tenglama uchun Koshi masalasi yechimini tartibi  $0 < \alpha < 1, 0 \leq \beta \leq 1$  bo'lgan holat uchun Duyamel prinsipi [2] yordamida topish usuli berilgan edi.

Mazkur tezisdan biz Hilfer kasr hosilasining  $1 < \alpha < 2$  va  $0 \leq \beta \leq 1$  bo'lgan holi uchun tenglama yechimini Duhamel prinsipi yordamida topamiz.

Duhamel prinsipidan foydalanishning qulaylik tomoni shundan iboratki, u bir jinsli bo'lmagan tenglamani yangi o'zgaruvchi kiritish yordamida bir jinsli bo'lgan tenglamaga keltiradi va yechim Duhamel integrali ko'rinishida topiladi.

**Ta’rif:** (Hilfer hosilasi).  $n-1 < \alpha < n, 0 \leq \beta \leq 1, n \geq 1$  sonlari berilgan bo’lsin. U holda Hilfer hosilasi [3] quyidagicha aniqlanadi:

$${}^H D^{\alpha, \beta} f(t) = I^{\beta(n-\alpha)} D^n I^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(t), \quad (1)$$

bu yerda  $D = \frac{df(t)}{dt}$

**Teorema:** Faraz qilaylik  $V(t, \tau, x), 0 \leq \tau \leq t, x \in \square^n, \alpha \in (1; 2)$  kasr tartibli  $\beta \in [0; 1]$  parametr bilan aniqlangan bir jinsli bo’lgan quyidagi tenglama uchun Koshi masalasining yechimi bo’lsin:

$${}^H D^{\alpha, \beta} V(t, \tau, x) + A(x, D_x) V(t, \tau, x) = 0, \quad t > \tau, x \in \square^1 \quad 1 < \alpha < 2, 0 \leq \beta \leq 1 \quad (2)$$

$${}^H D^{\alpha-1, \beta} V(t, \tau, x)_{t=\tau} = 0, \quad x \in \square^1 \quad (3)$$

$$(I^{(1-\beta)(2-\alpha)} V(t, \tau, x))_{t=\tau} = f(\tau, x), \quad (4)$$

U holda

$$U(t, x) = \int_0^t V(t, \tau, x) d\tau \quad (5)$$

quyidagi bir jinsli bo’lmagan tenglama uchun Koshi masalasi yechimi bo’ladi

$${}^H D^{\alpha, \beta} U(t, x) + A(x, D_x) U(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, x \in \square^1 \quad (6)$$

$$({}^H D^{\alpha-1, \beta} U(t, x))_{t=0} = 0, \quad x \in \square^1. \quad (7)$$

$$(I^{(1-\beta)(2-\alpha)} U(t, x))_{t=0} = 0, \quad x \in \square^1 \quad (8)$$

Bu yerda (5) ko’rinishidagi integral Duhamel integrali hisoblanadi.

### Foydalanilgan adabiyotlar

1. X.Xusainov “Hilfer ma’nosidagi kasr hosilali differensial tenglamalarni Duhamel prinsipida yechish”. Matematika, Mehanika va Intellektual texnologiyalar respublika ilmiy konferensiya. Toshkent, 2023. 264-bet.
2. S.Umarov “Introduction to fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols” Springer, 2015

3. R.Garra, R.Gorenflo, F.Polito, Z.Tomovski “Hilfer - Prabhakar derivatives and some applications” Journal: Applied Mathematics and Computation ,2015. 578-579- bet.

## ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ

*Д.И. Акрамова<sup>1</sup>, Ф.Е. Тагоев<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан*

*<sup>2</sup>Навоийский государственный горно-технологический университет, Наваи, Узбекистан*

*[shoda.akramova@mail.ru](mailto:shoda.akramova@mail.ru)*

Исследуется вторая начально-краевая задача в ограниченной области для дробного-диффузионного уравнения с оператором Бесселя и производной Герасимова-Капуто. Получены теоремы существования и единственности решения обратной задачи определения младшего коэффициента в одномерном дробно - диффузионном уравнении при условии интегрального наблюдения. Для доказательства существования решения использовался принцип Шаудера.

В области  $\Omega := \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t) = u_{xx}(x, t) + \frac{1}{x} u_x(x, t) - \frac{1}{x^2} u(x, t) + q(t)u(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

Пусть  $q(t)$  и  $f(x, t)$  – заданные функции. Поставим следующую задачу: найти в области  $\Omega$  функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению (1) и с начальным условием

$$u(x, 0) = a(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\lim_{x \rightarrow 0} x u_x(x, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (3)$$

где  $0 < \alpha < 1$  – заданное число,  $\partial_{0t}^\alpha$  – производная Герасимова-Капуто дробного порядка  $\alpha$ , с началом в точке 0, которая определяется следующим образом (см. [1], стр. 90):

$$\partial_{0t}^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} v'(\tau) d\tau.$$

Соотношения (1)-(3) являются прямой задачей, т.е. если известны функции  $q(t), f(x, t)$  и  $a(x)$  и постоянные  $\alpha$ , то решение  $u(x, t)$  может быть найдено из уравнений (1)-(3).

Обратная задача. Необходимо определить функцию если о решении прямой задачи (1)-(3) известна следующая дополнительная информация:

$$\int_0^1 u(x, t) dx = b(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $b(t)$  – заданная достаточно гладкая функция.

#### *Литература*

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

## **О РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

<sup>1</sup>Апаков Ю.П., <sup>2</sup>Мамажонов С.М.

<sup>1,2</sup>Институт Математика им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент,  
Узбекистан,

<sup>1</sup>Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан

[yusupjonapakov@gmail.com](mailto:yusupjonapakov@gmail.com), [sanjarbektamajonov@gmail.com](mailto:sanjarbektamajonov@gmail.com)

В данной работе в области  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$  рассматривается уравнение четвертого порядка вида

$$U_{xxxx} - U_{yy} + A_1 U_{xxx} + A_2 U_{xx} + A_3 U_x + A_4 U + A_5 U_y = F(x, y),$$

где  $p, q, A_i \in R$ ,  $i = \overline{1,5}$  и  $F(x, y)$  – заданная достаточно гладкая функция.

Заменой

$$U(x, y) = \exp\left[-\frac{A_1}{4}x + \frac{A_5}{2}y\right]u(x, y),$$

это уравнения приводится к виду

$$L[u] = u_{xxxx}(x, y) + a_1u_{xx}(x, y) + a_2u_x(x, y) + a_3u(x, y) - u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где

$$a_1 = A_2 - \frac{3A_1^2}{8}, \quad a_2 = \frac{A_1^3}{8} - \frac{A_1A_2}{2} + A_3, \quad a_3 = -\frac{3A_1^4}{256} + \frac{A_1^2A_2}{16} - \frac{A_1A_3}{4} + A_4 + \frac{A_5^2}{4},$$

$$f(x, y) = \exp\left[\frac{A_1}{4}x - \frac{A_5}{2}y\right]F(x, y).$$

Для уравнения (1) в области  $\Omega$  изучим следующую задачу.

**Задача А.** Найти функцию  $u(x, y)$  из класса  $C_{x,y}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $\Omega$  и следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = u(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(0, y) = \psi_3(y), \quad u_{xx}(p, y) = \psi_4(y), \quad 0 \leq y \leq q,$$

где  $\psi_i(y)$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $f(x, y)$  заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работе [1] рассмотрен случай  $a_1 = a_2 = 0$ ,  $a_3 \neq 0$ , а в работах [2-5] исследованы краевые задачи для модельных уравнений четвертого порядка спектральном методом. В работе [6], рассмотрена краевая задача для однородного уравнения (1), а в работе [7], изучена третья краевая задача для уравнения (1). В работах [8], [9] исследованы другие краевые задачи для уравнения (1), когда все коэффициенты переменные.

**Теорема 1.** Если задача А имеет решение, то при выполнении условий  $a_1 \leq 0$ ,  $a_3 \geq 0$  оно единственно.

**Теорема 2.** Если выполняются следующие условия:

$$1) D < \frac{\mu_1^3 (1 - e^{-2\mu_1 p})^2}{p(1 + \mu_1(1 + e^{-4\mu_1 p}) + 2\mu_1^2)};$$

$$2) \psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0, \psi_i(y) \in C^3[0, q], i = \overline{1, 4};$$

$$3) f(x, 0) = f(x, q) = 0, f_{xy}(x, y) \in C(\overline{\Omega}), 0 \leq x \leq p,$$

то решение задачи  $A$  существует. Здесь,

$$D = \max\{|a_i|, i = \overline{1, 3}\}, \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}.$$

Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Решение выписано через построенную функцию Грина.

### Литература

1. Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки, 2013, выпуск 1, с. 3-10.
2. Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 25:1 (2021), с. 51-66.
3. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right – hand Part // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, №3, pp. 632-640.
4. Аманов Д., Бекиев А.Б., Отарова Ж.А. Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка // УзМЖ, 2015, №4, с. 11-18.
5. Сабитов К. Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференциальные уравнения, 2020, том 56, №6, с. 761-774.

6. Y.P.Apakov and S.M.Mamajonov: A boundary-value problem for the fourth order equation with multiple characteristics in a rectangular domain // *Nonlinear Oscillations*. Published in vol. 24 (2021), No. 3, pp. 291-305.
7. Mamajonov S.M. The third boundary problem for a fourth-order non-homogeneous equation with constant coefficients // *Bull. Inst. Math.*, 2022, Vol. 5, No. 6, pp. 100-109.
8. Ю.П.Апаков, С.М.Мамажонов. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами // *Доклады Академии наук Республики Узбекистан*, 2022, №4, с. 7-13.
9. Ю.П.Апаков, С.М.Мамажонов. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с младшими членами // *Дифференциальные уравнения*, 2023, том 59, № 2, с. 183-192.

**О РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ**

<sup>1</sup>Апаков Ю.П., <sup>2</sup>Хамитов А.А.

<sup>1</sup>Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз,

<sup>1,2</sup>Наманганский инженерно-строительный институт  
[yusupjonapakov@gmail.com](mailto:yusupjonapakov@gmail.com), [azizbek.khamitov.93@mail.ru](mailto:azizbek.khamitov.93@mail.ru)

В области  $D^+ = \{(x, y, z): 0 < x < +\infty, 0 < y < q, 0 < z < r\}$  рассмотрим уравнения

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где  $q > 0$ ,  $r > 0$  – постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

**Задача В.** Найти решение уравнения (1) в области  $D^+$  из класса  $C_{x,y,z}^{3,2,2}(D^+) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(D^+ \cup \Gamma)$ , имеющие ограниченные первые производные по  $y$ , по  $z$  и второй производной по  $x$  при  $x \rightarrow +\infty$ , и  $u_y, u_z \in L_2(D^+)$ , удовлетворяющего следующими краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha u(x, 0, z) + \beta u_y(x, 0, z) = 0, \\ \gamma u(x, q, z) + \delta u_y(x, q, z) = 0, \\ u(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0, y, z) &= \psi_1(y, z), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y, z) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y, z) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad 0 \leq z \leq r, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Gamma = \partial D^+$  – граница области  $D^+$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  – заданные постоянные, причем  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ,  $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ , а  $\psi_1(y, z)$  – заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^i \psi_1(0, z)}{\partial y^i} + \beta \frac{\partial^{i+1} \psi_1(0, z)}{\partial y^{i+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^i \psi_1(q, z)}{\partial y^i} + \delta \frac{\partial^{i+1} \psi_1(q, z)}{\partial y^{i+1}} = 0, \\ \frac{\partial^4 \psi_1(y, 0)}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi_1(y, r)}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^6 \psi_1(y, 0)}{\partial y^4 \partial z^2} = \frac{\partial^6 \psi_1(y, r)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0. \end{cases} \quad i = 0, 2. \quad (4)$$

Отметим, что в плоскости полуограниченных областях в работах [1-3] исследованы некоторые корректные краевые задачи, а также в работах [4-5] в конечные области изучены краевые задачи в трехмерном пространстве.

**Теорема 1.** Если задача В имеет решение, то при выполнении условий  $\alpha\beta \leq 0$ ,  $\gamma\delta \geq 0$  оно единственно.

Теорема 1 единственности решение доказана с методом интегралов энергии.

**Теорема 2.** Если функции  $\frac{\partial^7 \psi_1(y, z)}{\partial y^4 \partial z^3} \in L_2[0 < y < q, 0 < z < r]$  и выполняются

условия согласования (4), то решение задачи  $B$  существует и представляется в виде

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\|V_{n,m}\|^2} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \psi_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} Y_n(y) \sin \frac{m\pi z}{r}, \quad (5)$$

где

$$Y_n(y) = (\alpha \sin \sqrt{v_n} y - \beta \sqrt{v_n} \cos \sqrt{v_n} y) A_n,$$

$$\|V_{n,m}\|^2 = A_{n,m}^2 \left[ \frac{1}{2} (\alpha^2 q + \beta^2 q v_n - \alpha \beta) + \left( \frac{\beta^2 \sqrt{v_n}}{4} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{v_n}} \right) \sin 2\sqrt{v_n} q + \frac{\alpha \beta}{2} \cos 2\sqrt{v_n} q \right] \frac{r}{2},$$

а  $\psi_{1n,m}$  — коэффициент Фурье функции  $\psi_1(y, z)$ , т.е.

$$\psi_{1n,m} = \frac{1}{\|V_{n,m}\|^2} \int_0^q \int_0^r \psi_1(y, z) Y_n(y) \sin \frac{m\pi z}{r} dy dz.$$

Доказан, что ряд (5) и его производные входящую в уравнению (1) сходятся абсолютно и равномерно в области  $D^+ \cup \Gamma$ .

### Литературы

1. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях// Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. –Нальчик, 2008. -№2(22). –С. 147-151.

2. Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. – Т.: «Fan va texnologiya», 2019, 156 стр.

3. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье в областях с некомпактными границами// Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2008. -№1. –С. 14-22

4. Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины// Известия вузов. Математика 2021, № 10, - С. 60-70.

5. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О решения одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве// Научный вестник Наманганского государственного университета. – Наманган, 2020. - № 4. – С. 21-31

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО В  
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

*Ашууров Р.Р<sup>1</sup>, Дусанова У.Х<sup>2</sup>*

*Институт математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан<sup>1,2</sup>*

*ashurovr@gmail.com<sup>1</sup>, umidakhon8996@gmail.com<sup>2</sup>*

Следует отметить, что нелокальное условие типа (6) впервые появилось в [1] при исследовании задачи дозвукового обтекания профилей, заканчивающейся правильной плотностью скачков для уравнения Чаплыгина. В [2] такой тип задач был предложен для уравнений эллиптического типа. В [3] вместо условия (6) для уравнения (1) в прямоугольной области  $D$  изучалось начально-краевое условие  $u(x, -\alpha) = \psi(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , а в работе [4] изучалось задача с таким же нелокальным условием (6) но без дробного порядкового производной Капуто. Здесь в основу работы положен критерий единственности решения нелокальной задачи (2)-(6). В этом случае решение строится в виде суммирования рядов собственных функций соответствующей одномерной задачи Штурма-Лиувилля. По аналогии с работой [5] установлена устойчивость решения по нелокальному условию (6) в нормах пространств  $L_2[0,1]$  и  $C(\bar{D})$ .

1. Рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} D_t^\rho u - u_{xx} = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = 0, & t < 0. \end{cases} \quad (6)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$ , где  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  – заданные действительные числа. Пусть  $0 < \rho < 1$ , и  $D_+ = D \cup \{t > 0\}$ ,  $D_- = D \cap \{t < 0\}$ .

**Определение.** Регуляризованная дробная производная (производная Капуто) определяется с помощью формулой:

$$D_{0t}^\rho h(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^t (t-z)^{-\rho} h'(z) dz.$$

**Задача.** Найти в области  $D$  функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C^2(D_-) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_+), \quad (7)$$

$$Lu(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-, \quad (8)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (9)$$

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad D_t^\rho u(0+0) = u_t(0-0), \quad (10)$$

$$u(x, -\alpha) - u(x, -\beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (11)$$

где  $\varphi(x)$  – заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

2. Пусть  $u(x, t)$  – решение задачи (2)–(6). Рассмотрим функции

$$u_k(t) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, t) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Из вышеуказанных уравнений, приравняв к нулю внутреннюю часть, мы окончательно имеем

$$D_t^\rho u_k + \lambda^2 u_k(t) = 0, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$u_k'' + \lambda_k^2 u_k(t) = 0, \quad t < 0, \quad \lambda_k = \pi k. \quad (14)$$

Дифференциальные уравнения (8) и (9) имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k E_{\rho,1}(-\lambda_k^2 t^\rho), & t > 0 \\ a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t, & t < 0, \end{cases} \quad (15)$$

где  $a_k, b_k$  и  $c_k$  – произвольные постоянные. Используя условием (5)-(6) мы

окончательно получим  $a_k = c_k$  и  $b_k = -c_k \lambda_k$ ,  $c_k = \frac{\varphi_k}{\delta_{\alpha\beta}(k)}$ .

где для всех  $k \in N$   $\delta_{\alpha\beta}(k)$  имеет следующий вид:

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha - E_{\rho,1}(-\lambda_k^2 \beta^\rho) \neq 0 \quad (16)$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

**Теорема 1.** Если существует решение задачи (2)–(6), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (11) при всех  $k \in N$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Ф.И. ФРАНКЛЪ. *Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уклонения.* ПММ:20:2 (1956), 196-202.
- [2]. А.В. БИЦАДЗЕ, А.А. САМАРСКИЙ, *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач,* 185,4,739-740,1969.
- [3]. К.Б. САБИТОВ, *Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо – гиперболического в прямоугольной области,* Матем. Заметки, 86,4,(2009), 273-279.
- [4]. К.Б. САБИТОВ, *Нелокальная задача для уравнения параболо – гиперболического типа в прямоугольной области,* Матем. Заметки, 89 4 (2011), 596-602
- [5]. Н.И. ИОНКИН, *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием,* Дифференц. уравнения, 13:2 (1977), 294-304.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ-ГУРСА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Дурдиев Д.К.<sup>1,2</sup>, Тошев Д.А.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан.

<sup>2</sup>Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

<sup>1</sup>[ddurdiev@mathinst.uz](mailto:ddurdiev@mathinst.uz), <sup>2</sup>[toshevdilshod1996@gmail.com](mailto:toshevdilshod1996@gmail.com).

В области  $D := \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq T - y\}$  (рис. 1) рассмотрим следующее уравнение [1]-[4]:

$$u_{xx} - u_{yy} - p(x)u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (1)$$

(1) является дифференциальным уравнением гиперболического типа.

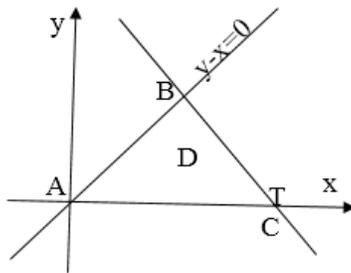


Рисунок 1. Характерическая область.

**Прямая задача.** При заданных функции  $f(x, y)$ ,  $p(x)$  требуется определить в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (1) при следующих начальных [5]-[8] и граничных условиях:

$$u|_{AB} = \psi(x), \quad u|_{AC} = \varphi(x), \quad (2)$$

где  $\psi(x)$  и  $\varphi(x)$  заданные функции.

**Теорема.** Пусть  $\varphi(x) \in C^2[0, T]$ ,  $\psi(x) \in C^2\left[0, \frac{T}{2}\right]$ ,  $f(x, y) \in C_x^1(D)$ ,  $p(x) \in C^1[0, T]$  и выполнено условие согласованности  $\psi(0) = \varphi(0)$ . Тогда в области  $D$  существует единственное классическое решение задачи (1)-(2) и  $u(x, t) \in C^2(D)$ .

## Список литературы

1. А. В. Бицадзе "Уравнения смешанного типа" М.: Изд-во АН СССР, 1959.

2. А. В. Бицадзе "Некоторые классы уравнений в частных производных" М.: Наука, 1981.
3. Смирнова М.М. "Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения" М.: Наука, 1966.
4. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. Уфа, 2015.
5. Капустин Н.Ю. Об обобщённой разрешимости задачи Трикоми для парабола-гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 6. С. 1294–1298.
6. Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных парабола-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 56–63.
7. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16. № 2. С. 72–82.
8. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. N 4. P. 291-314.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НАЧАЛЬНЫМИ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

*Дурдиев Д.К.<sup>1</sup>, Турдиев Х.Х.<sup>2</sup>, Суяров Т.Р.<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>*Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент Узбекистан*

<sup>2,3</sup>*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан*

*ddurdiev@mathinst.uz, hturdiev@mail.ru, tsuyarov007@gmail.com.*

Работа посвящена исследованию задачи для двумерного волнового уравнения с начальными и нелокальными краевыми условиями. Методом разделения переменных найдено классическое решение рассматриваемой задачи, доказана его единственность и устойчивость по начальным данным.

**Постановка задачи.**

В области  $\Omega = D \times (0, T); D = \{(x, y) | 0 < x, y < 1\}$  рассмотрим двумерного волнового уравнения

$$u_{tt}(x, y, t) - \Delta u + q(t)u(x, y, t) = f(x, y, t), \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_1(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \quad (1.2)$$

$$u(x, y, t)_t|_{t=0} = \varphi_2(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \quad (1.3)$$

и нелокальным-граничным условиям

$$u_x(0, y, t) = u_x(1, y, t), u(0, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t), u_y(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T \quad (1.5)$$

где  $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$  и  $f(x, y, t)$  – заданные функции.

**Определение.** В прямой задаче требуется определить функцию  $u(x, y, t) \in C_{xy,t}^{2,2}(\bar{\Omega})$  удовлетворяющую равенствам (1.1)-(1.5), при заданных достаточно гладких функций  $q(t), f(x, y, t)$ .

Предположим, что в этой статье заданные функции  $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$  и  $f(x, y, t)$  удовлетворяют следующим предположениям:

(A1)  $\varphi_1(x, y) \in C^{(4)}(\bar{D}), \varphi_2(x, y) \in C^{(3)}(\bar{D})$ :

$$\varphi(0, y) = \varphi(1, y) = 0, \varphi_x(0, y) = \varphi_x(1, y) = 0, \varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xx}(1, y) = 0,$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x, 1) = 0, \varphi_y(x, 0) = \varphi_y(x, 1) = 0, \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yy}(x, 1) = 0.$$

(A2)  $f(x, y, \cdot) \in C[0, T]$  и для  $t \in [0, T], f(\cdot, \cdot, t) \in C^3[0, 1], f(\cdot, \cdot, t)^{(4)} \in L_2[0, 1]$ :

$$f(0, y, t) = f(1, y, t) = f_x(0, y, t) = f_x(1, y, t) = f_{xx}(0, y, t) = f_{xx}(1, y, t) = 0,$$

$$f(x, 0, t) = f(x, 1, t) = f_y(x, 0, t) = f_y(x, 1, t) = f_{yy}(x, 0, t) = f_{yy}(x, 1, t) = 0.$$

В результате имеем следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $q(t) \in C[0, T]$  и если функции  $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$  и  $f(x, y, t)$  удовлетворяют условиям A1), A2), то существует единственное решение задачи (1.1)–(1.5)  $u(x, y, t) \in C_{xy,t}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

*Список литературы*

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972.
2. Бицадзе А. В., Самарский А. А. // Докл. АН СССР . 1969. Т. 185, №4. С. 739 — 740.
3. Ильин В. А. II Докл. АН СССР . 1983. Т. 273, №5 . С. 1048 — 1053.
4. Ильин В. А. /I Докл. АН СССР . 1984. Т. 274, №1. С. 19 — 22.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

*У.Д. Дурдиев<sup>1,2</sup>, З.Р. Бозоров<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Бухарский государственный университет*

<sup>2</sup>*Бухарское отделение института математики имени В.И. Романовского*

*[umidjan93@mail.ru](mailto:umidjan93@mail.ru), [zavqiddinbozorov2011@mail.ru](mailto:zavqiddinbozorov2011@mail.ru)*

В данной статье рассмотрена прямая задача с нелокальными по времени и обратная задача с интегральными условиями переопределения по определению коэффициента, зависящего от времени при младшей производной для уравнения колебания балки.

Рассмотрим балку длиной  $l$ , опирающуюся на концы. Под действием внешней силы  $G(x, t)$ , вынужденные изгибные поперечные колебания балки описываются уравнением четвертого порядка

$$\rho S u_{tt} + E J u_{xxxx} + Q(t)u = G(x, t),$$

где  $\rho$  - плотность балки,  $S$  - площадь поперечного сечения балки,  $E$  - модуль упругости материала балки,  $J$  - момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси и по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жесткости  $Q(t)$ .

Разделив на  $\rho S$  запишем это уравнение в следующем в виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

где  $a^2 = EJ/\rho S$ ,  $q(t) = Q(t)/\rho S$  и  $f(x, t) = G(x, t)/\rho S$ .

Уравнение (1) рассмотрим в прямоугольной области

$$D = \{(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T\}, D_T := \bar{D},$$

где  $l$  - длина балки,  $T$  - временной интервал, с нелокальными начальными

$$u(x, 0) + \delta_1 u(x, T) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) + \delta_2 u_t(x, T) = \psi(x), \quad (2)$$

граничными условиями

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

и условиями согласования

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0, \quad \varphi(l) = \psi(l) = 0.$$

В **прямой** задаче требуется определить

$$u(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C_{x,t}^{4,2}(D)$$

удовлетворяющую равенствам (1)-(3), при положительных чисел  $\delta_1, \delta_2$  и заданных чисел  $a, l, T$  и достаточно гладких функций  $q(t), f(x, t), \varphi(x), \psi(x)$ .

В данной работе изучается следующая обратная задача: найти коэффициент  $q(t), t \in [0, T]$  если известно условие переопределение вида:

$$\int_0^l h(x)u(x, t)dx = H(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $h(x), H(t)$  - заданные достаточно гладкие функции и удовлетворят следующим условиям согласования:

$$\int_0^l h(x)\varphi(x)dx = H(0) + \delta_1 H(T),$$

$$\int_0^l h(x)\psi(x)dx = H'(0) + \delta_2 H'(T), \quad H(t) \neq 0. \quad (5)$$

В данной работе исследуется однозначная разрешимость нелокальной по времени обратной краевой задачи для уравнения колебания балки с интегральным условием переопределения. Рассматриваемая задача в определенном смысле сведена к вспомогательной задаче и с использованием принципа сжимающих отображений установлены единственные условия существования решения эквивалентной задачи. Далее на основе эквивалентности этих задач доказывается теорема существования и единственности решения.

## Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
2. Крылов А.Н. Вибрация судов. Л., М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
3. Гусев Б.В., Саурин В.В. О колебаниях неоднородных балок, Инженерный вестник Дона. 2017. \No3. <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312>

### ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ МЛАДШЕМ ЧЛЕНЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Дурдиев У.Д.<sup>1\*</sup>, Жумаева М.Р.<sup>2</sup>

Бухарский государственный университет<sup>1,2</sup>,

*umidjan93@mail.ru*\*

Рассмотрим бесконечную балку, под действием внешней силы  $G(x, t)$ . Вынужденные изгибные поперечные колебания балки описывается уравнением четвертого порядка [1, 2]

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} + Q(t)u = G(x, t),$$

где  $\rho$  - плотность балки,  $S$  - площадь поперечного сечения балки,  $E$  - модуль упругости материала балки,  $J$  - момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси и по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жесткости  $Q(t)$ .

Разделив на  $\rho S$  запишем это уравнение в следующем виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

где  $a^2 = EJ/\rho S$ ,  $q(t) = Q(t)/\rho S$  и  $f(x, t) = G(x, t)/\rho S$ .

Уравнение (1) рассмотрим в полуплоскости

$$D = \{(x, t): -\infty < x < +\infty, \quad t > 0\},$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in R. \quad (2)$$

В **прямой задаче** ищется функция  $u(x, t)$ , удовлетворяющая уравнениям (1), (2) и условию

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_t^1(D \cup t = 0) \cap C(\bar{D}). \quad (3)$$

При этом функции  $q(t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  считаются заданными и достаточно гладкими.

**Обратная задача:** найти коэффициент  $q(t)$ , если решение задачи Коши (1)-(3) удовлетворяет условию

$$u(0, t) = g(t), \quad (4)$$

где  $g(t)$  - заданная достаточно гладкая функция, кроме того  $|g(t)| \geq g_0 > 0$ .

В настоящей работе устанавливается достаточное условие, при котором решение обратной задачи (1) – (4) существует и единственно.

### Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1966.
2. Крылов А.Н. Вибрация судов, Изд. Академии Наук СССР, Москва-Ленинград, 1948.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЧЕРЕЗ СХЕМА ТИПА КРАНКА-НИКОЛЬСОНА

<sup>1</sup>Жуманиязов Н, <sup>2</sup>Болтаева Г.

<sup>1</sup>Ургенчский филиал Ташкентского Университета Информационных Технологий, Ургенч, Узбекистан

<sup>2</sup>Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан  
[nizomjon\\_jumaniyazov@ubtuit.uz](mailto:nizomjon_jumaniyazov@ubtuit.uz), [boltayevagozal334@gmail.com](mailto:boltayevagozal334@gmail.com)

Цель данной статьи - представить конечно-разностную схему типа Кранка-Николсона численная схема 2-го порядка для решения стационарного уравнения Фоккера-Планка в одномерном слое.

В настоящей работе мы рассматриваем краевую задачу для вырожденного параболическое уравнение в частных производных в множестве  $Q = [-1; 1] \times [z_0, z_1]$ ,  $z_0 < z_1$ :

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \alpha \psi - \sigma \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right] = W, \text{ для } (\mu, z) \in Q \quad (1)$$

$$\psi(\mu, z_0) = f(\mu) \text{ для } \mu \in [-1; 0] \quad (2)$$

$$\psi(\mu, z_1) = g(\mu) \text{ для } \mu \in [-1; 0] \quad (3)$$

где  $\alpha = \alpha(\mu, z)$ ,  $\sigma = \sigma(\mu, z)$ ,  $W = W(\mu, z)$ . Обозначим  $Q_-$  и  $Q_+$  через

$Q_- = [-1; 0] \times [z_0, z_1]$  и  $Q_+ = (0; 1] \times [z_0, z_1]$  соответственно.

Подробная информация о выводе уравнения Фоккера-Планка (1) из общего уравнения Фоккера-Планка можно найти в [1]. Это проблема со структура начального-конечного значения, неявные числовые схемы должны быть в состоянии решить ее больше надежнее, чем явные. Легко видеть, что то, что написано неявно на ПКЗ (проблема конечного значения) половина  $Q_-$  явно на половине ПНЗ (проблема начального значения)  $Q_+$ , и наоборот, мы можем сказать, что схема типа Кранка-Николсона, которая обладает неявная и явная части с одинаковым весом - идеальный кандидат на то, чтобы быть используется на всей сетке без изменения внешнего вида схем. Мы выводим численную схему типа Кранка-Николсона и применяем ее к задаче (1) - (3) для получения численного решения. Численная схема, состоящая из нечетных и четных схем, демонстрирует сходимость порядка 2 по обеим переменным  $z$  и  $\mu$  для регулярных решений. Нечетная схема предпочтительнее с точки зрения вычислительного времени.

Численные результаты представлены в [1]. Ванаха в [2] решает задачу (1) - (3) для  $\alpha \equiv W \equiv 0$  и  $\sigma$  постоянной по конечно-разностной схеме первого порядка, и Ким и Транкили в [2] используют разделение переменных и вариацию

параметров. Для решения указанной выше проблемы, когда  $\alpha$  и  $\sigma$  зависят от  $z$  и (но не от  $\mu$ ) и  $W \equiv 0$ .

Численное и графическое сравнение с результатами, полученными в [2] и [3], является показано в [1].

### Литература

1. Lopez Pouso, Oscar and Jumaniyazov, Nizomjon., "Numerical experiments with the Fokker-Planck equation in 1D slab geometry," Journal of Computational and Theoretical Transport, 45, No. 3, 184-201 (2016).
2. Kim, Arnold D. and Tranquilli, Paul., "Numerical solution of the Fokker-Planck equation with variable coefficients," Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 109, No. 5, 724-740 (2008).
3. Vanaja, Venkataraman., "Numerical solution of a simple Fokker-Planck equation," Applied Numerical Mathematics 9, No. 6, 533-540 (1992).

### ПРЯМОЙ И ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННОЙ КОЭФФИЦИЕНТЫ

<sup>1</sup>Жуманиязов Н., <sup>2</sup>Кодирова Д.

<sup>1</sup>Ургенчский филиал Ташкентского Университета Информационных  
Технологий, Ургенч, Узбекистан

<sup>2</sup>Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан  
[nizomjon\\_jumaniyazov@ubtuit.uz](mailto:nizomjon_jumaniyazov@ubtuit.uz), [sanjar\\_matkarimov86@mail.ru](mailto:sanjar_matkarimov86@mail.ru)

Статья посвящена численные результаты, полученные для задач [1], [3], [4] итерационными и прямыми методами на основе конечно-разностной схемы, экспериментально доказать, что прямой метод превосходит обычно используемый итерационный один, если не требуется мелкая сетка (см. [2]). Лучше придумать умный способ выбор начального числа для того, чтобы итерационный алгоритм работал хорошо.

Как обычно, мы изучаем краевую задачу для вырожденного параболического уравнения в частных производных в множестве  $Q = [-1; 1] \times [z_0, z_1]$ ,  $z_0 < z_1$ :

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \alpha \psi - \sigma \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right] = W, \text{ для } (\mu, z) \in Q \quad (1)$$

$$\psi(\mu, z_0) = f(\mu) \text{ для } \mu \in [-1; 0) \quad (2)$$

$$\psi(\mu, z_1) = g(\mu) \text{ для } \mu \in [-1; 0) \quad (3)$$

где  $\alpha = \alpha(\mu, z)$ ,  $\sigma = \sigma(\mu, z)$ ,  $W = W(\mu, z)$ .

Прежде всего,  $Q$  разбивается на следующие подмножества:  $Q_- = [-1; 0) \times [z_0, z_1]$ ,  $Q_+ = (0; 1] \times [z_0, z_1]$  и  $Q_0 = \{0\} \times [z_0, z_1]$ .

Основная идея итерационного метода - вычислить решение задачи (1) - (3) в подмножествах  $Q_-$ ,  $Q_+$ , используя маршевую стратегию по переменной  $z$ , работая отдельно на каждом из этих субдоменов. Очевидно, что при решении на  $Q_+$ , но возвращается при решении на  $Q_-$ .

Для того, чтобы начать эту процедуру, первоначальное предположение решения в точках требуется сетка, принадлежащая  $Q_0$ . Набор этих значений обновляется после выполнение одного марша вперед на  $Q_+$  и одного марша назад на  $Q_-$  до схождения или выполнено заданное количество итераций. Поскольку время вычислений важно, любая попытка численного решения обратной задачи, подобная (1) - (3), должна учитывать данные этого исследования. В рекомендуемая стратегия - попробовать использовать прямой подход (см. [1]), если только не очень сетка обязательна. Подробные численные тесты и результаты приведены в [2].

#### *ЛИТЕРАТУРА*

1. Lopez Pouso, Oscar and Jumaniyazov, Nizomjon., "Numerical experiments with the Fokker-Planck equation in 1D slab geometry," Journal of Computational and Theoretical Transport, 45, No. 3, 184-201 (2016).

2. Lopez Pouso, Oscar and Jumaniyazov, Nizomjon., "Direct versus iterative methods for backward-forward diffusion equations. "Numerical comparisons on a particular transport kinetic model," submitted.
3. Kim, Arnold D. and Tranquilli, Paul., "Numerical solution of the Fokker-Planck Equation with variable coefficients," Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 109, No. 5, 724-740 (2008).
4. Vanaja, Venkataraman., "Numerical solution of a simple Fokker-Planck equation," Applied Numerical Mathematics 9, 533-540 (1992).

## ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННОЙ КОЭФФИЦИЕНТЫ

<sup>1</sup>Жуманиязов Н., <sup>1</sup>Курбонова К.

<sup>1</sup>Ургенчский филиал Ташкентского Университета Информационных  
Технологий, Ургенч, Узбекистан

<sup>2</sup>Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан  
[nizomjon\\_jumaniyazov@ubtuit.uz](mailto:nizomjon_jumaniyazov@ubtuit.uz), [qurbanovakaromat6@gmail.com](mailto:qurbanovakaromat6@gmail.com)

Безусловно, стандартная реализация конечно-разностных схем для уравнений в частных производных прямого и обратного направлений состоит в использовании итерационного метода. В этой статье предлагается итерационный метод, который, как утверждают несколько авторов, дает лучшие результаты для вышеупомянутых проблем. Представлен эффективный способ выбора начального приближения для итерационного метода.

В настоящей работе мы рассматриваем краевую задачу для вырожденного параболическое уравнение в частных производных в множестве  $Q = [-1; 1] \times [z_0, z_1]$ ,  $z_0 < z_1$ :

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \alpha \psi - \sigma \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right] = W, \quad \text{для } (\mu, z) \in Q \quad (1)$$

$$\psi(\mu, z_0) = f(\mu) \quad \text{для } \mu \in [-1; 0] \quad (2)$$

$$\psi(\mu, z_1) = g(\mu) \quad \text{для } \mu \in [-1; 0] \quad (3)$$

где  $\alpha = \alpha(\mu, z)$ ,  $\sigma = \sigma(\mu, z)$ ,  $W = W(\mu, z)$ . Обозначим  $Q_-$  и  $Q_+$  через

$Q_- = [-1; 0] \times [z_0, z_1]$  и  $Q_+ = (0; 1] \times [z_0, z_1]$  соответственно.

Подробная информация о выводе уравнения Фоккера-Планка (1) из общего уравнения Фоккера-Планка можно найти в [1]. Это проблема со структура начального-конечного значения, неявные числовые схемы должны быть в состоянии решить ее больше надежнее, чем явные. Легко видеть, что то, что написано неявно на ПКЗ (проблема конечного значения) половина  $Q_-$  явно на половине ПНЗ (проблема начального значения)  $Q_+$ , и наоборот, мы можем сказать, что схема типа Кранка-Николсона, которая обладает неявная и явная части с одинаковым весом - идеальный кандидат на то, чтобы быть используется на всей сетке без изменения внешнего вида схем. Ну, на этом статье мы выводим численную схему итерационного метода для задача (1) - (3) для получения численного решения.

Цель итеративного алгоритма состоит в том, чтобы вычислить решение вышеизложенного, заметив, что можно использовать маршевую стратегию в переменной  $z$ , работая отдельно над каждой из подобластей  $Q_+$  и  $Q_-$ . Ясно, что при решении задачи в  $Q_+$  нужно двигаться вперед, а при решении задачи в  $Q_-$  – возвращаться назад (см. [1]). Для запуска этой процедуры требуется начальное предположение решения на точках сетки, принадлежащих  $Q_0$ . Набор этих значений обновляется после выполнения одного прямого марша по  $Q_+$  и одного обратного марша по  $Q_-$  до тех пор, пока не будет достигнута сходимость или не будет выполнено заданное количество итераций.

Численные результаты представлены в [1]. Ванаха в [2] решает задачу (1) - (3) для  $\alpha \equiv W \equiv 0$  и  $\sigma$  постоянной по конечно-разностной схеме первого порядка, и Ким и Транкили в [2] используют разделение переменных и

вариацию параметров. Для решения указанной выше проблемы, когда  $\alpha$  и  $\sigma$  зависят от  $z$  и (но не от  $\mu$ ) и  $W \equiv 0$ .

Численное и графическое сравнение с результатами, полученными в [2] и [3], являются показано в [1].

### Литература

1. Lopez Pouso, Oscar and Jumaniyazov, Nizomjon., "Numerical experiments with the Fokker-Planck equation in 1D slab geometry," Journal of Computational and Theoretical Transport, 45, No. 3, 184-201 (2016).
2. Kim, Arnold D. and Tranquilli, Paul., "Numerical solution of the Fokker-Planck equation with variable coefficients," Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 109, No. 5, 724-740 (2008).
3. Vanaja, Venkataraman., "Numerical solution of a simple Fokker-Planck equation," Applied Numerical Mathematics 9, No. 6, 533-540 (1992).

## ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ $\mathfrak{Sp}(4n)$ .

*С. С. Журабоев, Р. А. Гаффоров*

*Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан*

*[saidaxbor.juraboyev@mail.ru](mailto:saidaxbor.juraboyev@mail.ru), [gafforov.rahmatjon@mail.ru](mailto:gafforov.rahmatjon@mail.ru)*

Пусть  $H^n$  –  $n$ -мерное векторное пространство над телом кватернионов  $H$ . Известно, что  $H^n$  можно рассматривать как  $4n$ -мерное вещественное векторное пространство. Обозначим это вещественное векторное пространство через  $V$ .

Пусть  $G = \mathfrak{Sp}(4n)$  групп вещественные представление группа  $Sp(n)$  подгруппа в  $GL(4n, R)$ , т.е

$$\mathfrak{Sp}(4n) = \left\{ g \in GL(4n, R) : gg^T = E, gI g^T = I, gJ g^T = J, gK g^T = K, \det g = 1 \right\},$$

где  $E$  –  $4n$ -мерная единичная матрица, а матрицы  $I, J, K$  соответственно имеют в виде:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & \theta & \dots & \theta \\ \theta & I_1 & \dots & \theta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \theta & \theta & \dots & I_1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & \theta & \dots & \theta \\ \theta & J_1 & \dots & \theta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \theta & \theta & \dots & J_1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & \theta & \dots & \theta \\ \theta & K_1 & \dots & \theta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \theta & \theta & \dots & K_1 \end{bmatrix};$$

В этом случае, матрицы  $\theta$ -,  $I_1$ ,  $J_1$  и  $K_1$  соответственно 4-мерная нулевая матрица и 4-мерная симплектическая матрица, т.е.

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Также,  $g^t$ -транспонированная матрица  $g$ .

В дальнейшем через  $\mathfrak{I}$  обозначать интервал  $(a, b)$  из  $R$  (возможны случаи, когда  $a = -\infty$  или  $b = +\infty$ ).  $\mathfrak{I}$ -путь в  $V$  называется вектор-функция  $\vec{x}(t): \mathfrak{I} \rightarrow V$ ,  $\vec{x}(t) = \{x_l(t)\}_{l=1}^{4n}$ , у которой все координатные отображения  $x_l: \mathfrak{I} \rightarrow R$  являются бесконечно дифференцируемыми функциями, [2].

$\mathfrak{I}$ -путь  $\vec{x}(t)$  называется *регулярным*, если  $\vec{x}^{(1)}(t) := x'(t) \neq 0$  для всех  $t \in \mathfrak{I}$ . Для каждого  $\mathfrak{I}$ -пути  $\vec{x}(t) = \{x_l(t)\}_{l=1}^{4n}$  через  $M(\vec{x})(t)$  обозначим  $4n \times 4n$ -матрицу  $(x_l^{(m-1)}(t))_{l,m=1}^{4n}$ , где  $l$ -ый строкой имеет координаты  $x_l^{(m-1)}(t)$ ,  $x_l^{(0)}(t) = x_l(t)$ ,  $l, m = \overline{1, 4n}$ . Через  $M'(\vec{x})(t)$  обозначается матрица  $(x_l^{(m)}(t))_{l,m=1}^{4n}$ .  $\mathfrak{I}$ -путь  $\vec{x}(t)$  называется *сильно регулярным*, если определитель  $\det M(\vec{x})(t)$  не равно нулю при всех  $t \in \mathfrak{I}$ , [2].

Пусть  $G$  – подгруппа группы  $GL(4n, R)$ . Два  $\mathfrak{S}$ –пути  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{y}(t)$  называются  $G$ –эквивалент, если существует такой элемент  $g \in G$ , что  $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)g$  для всех  $t \in \mathfrak{S}$ .

Пусть группа  $G = \mathfrak{Sp}(4n)$ . Следующая теорема определяет необходимые и достаточные условия  $G$ –эквивалентности сильно регулярных  $\mathfrak{S}$ –путей  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{y}(t)$  с помощью матриц  $M(\vec{x})(t)$  и  $M(\vec{y})(t)$ .

**Теорема.** *Два сильно регулярных  $\mathfrak{S}$ –путей  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{y}(t)$   $G$ –эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства для всех  $t \in \mathfrak{S}$ :*

$$i_1) M'(\vec{x})(t)(M(\vec{x})(t))^{-1} = M'(\vec{y})(t)(M(\vec{y})(t))^{-1};$$

$$i_2) M(\vec{x})(t)(M(\vec{x})(t))^t = M(\vec{y})(t)(M(\vec{y})(t))^t;$$

$$i_3) M(\vec{x})(t)I(M(\vec{x})(t))^t = M(\vec{y})(t)I(M(\vec{y})(t))^t;$$

$$i_4) M(\vec{x})(t)J(M(\vec{x})(t))^t = M(\vec{y})(t)J(M(\vec{y})(t))^t;$$

$$i_5) M(\vec{x})(t)K(M(\vec{x})(t))^t = M(\vec{y})(t)K(M(\vec{y})(t))^t;$$

$$i_6) \det M(\vec{x})(t) = \det M(\vec{y})(t)$$

где  $(M(\vec{x})(t))^t$  – транспонированная матрица к матрице  $M(\vec{x})(t)$ .

### Список литературы

1. Журабоев С. С. Эквивалентность путей относительно действия групп вещественных представлений  $\mathfrak{Sp}(n)$  // Классическая и современная геометрия, 2021, с. 70-72.
2. Khodyrovich M. K., Solyjonovich J. S. Equivalence of Paths under the Action of the Real Representation of  $\mathfrak{Sp}(n)$  // Journal of Applied Mathematics and Physics. 10, 2022. с. 1837–1858.

З.Муминов К. К., Гаффоров Р. А Системы матричных дифференциальных уравнений для поверхностей // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 68, № 1, 2022, с. 70–79.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

*Б.И. Исломов*

*Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*

*islomovbozor@yandex.ru.*

В последние годы возник интерес исследованию методом спектрального анализа[1] однозначной разрешимости и устойчивости решения прямых и обратных задач для модельного уравнения смешанного типа второго порядка в прямоугольной области. Отметим работы М.М. Хачева [2], Н.Ю. Капустина и Е.И. Моисеева[3], К.Б. Сабитова[4].

Заметим, что краевые задачи для уравнения парабола-гиперболического типа, когда параболическая часть содержит оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля или Капуто в специальных областях мало изучена. Отметим работы [5-6].

В настоящей работе изучается краевая задача нового типа для уравнения парабола-эллиптико - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области.

В прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, -p < y < r\}$  рассмотрим уравнение смешанного типа

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - {}_c D_{qy}^\alpha u, & x > 0, y > q, \\ u_{xx} + u_{yy}, & x > 0, y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & x > 0, y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $p > 0, r > 0, 0 < q < r$  – заданные действительные числа.  ${}_c D_{qy}^\alpha$  – оператор

дробного дифференцирования по  $y$  в смысле Капуто порядка  $\alpha \in (0,1]$ , определяемый по формуле [6]:

$${}_c D_{qy}^\alpha f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_q^y (y-t)^{-\alpha} f'(t) dt, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{d}{dy} f(y), & \alpha = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Введем обозначения:  $J_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$ ,  $J_2 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = q\}$ ,  
 $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$ ,  $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ ,  $\Omega_3 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y > q\}$ ,  
 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup J_1 \cup J_2$ ,  $\Delta_1 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J_1$ ,  $\Delta_2 = \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup J_2$ .

В области  $\Omega$  исследуем следующую задачу.

**Задача А.** Требуется найти функции  $u(x, y)$  с следующими свойствами: 1)  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $u \in C_x^2(\bar{\Omega})$ ,  $u \in C_y^2(\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$ ,  ${}_c D_{0y}^\alpha u \in C(\bar{\Omega}_3)$  и удовлетворяет уравнению (1) в областях  $\Omega_j (j=1,3)$ ; 2)  $(y-q)^{1-\alpha} u_y(x, y) \in C(\Omega_3 \cup J_2)$ ,  $u_y(x, y) \in C(\Delta_1 \cup \Omega_2 \cup J_2)$  и на линии  $J_2$  выполняются условия склеивания

$$u(x, q+) = u(x, q-), \quad (x, q) \in \bar{J}_2, \quad \lim_{y \rightarrow q+} (y-q)^{1-\alpha} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow q-} u_y(x, y), \quad (x, 0) \in J_2; \quad (3)$$

3)  $u(x, y)$  удовлетворяет граничным условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad -p \leq y \leq r, \quad u_y(x, -p) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

где  $\psi(x)$  – заданные достаточно гладкие функции.

Заметим, что прямые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа целого порядка исследовано в работе К.Б.Сабитова [4], а уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка изучено в [7].

**Теорема 1.** Если в области  $\Omega$  существует решение  $u(x, y)$  задачи **А**, то оно единственно только тогда, когда выполнено условие

$$\delta_{pq}(n) = (\Gamma(\alpha)sh\pi nq + \pi nch\pi nq) \sin \pi n p - (\Gamma(\alpha)ch\pi nq + \pi nsh\pi nq) \cos \pi n p \neq 0 \quad (5)$$

при всех  $n \in N$ .

**Теорема 2.** Если выполнены условия (5),  $\delta_{pq}(n) > C_0 e^{\pi n q}$  и  $\psi(x) \in C^3[0,1]$ ,  $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(1) = 0$ ,  $i = 0, 2$ , то существует единственное решение  $u(x, y)$

задача А и оно определяется рядом  $u(x, y) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) \sin \pi n x$ , где

$$u_n(y) = \begin{cases} \beta_n E_{1/\alpha}(-\pi^2 n^2 (y-q)^\alpha, 1), & q < y < r, \\ a_n \operatorname{ch} \pi n y + b_n \operatorname{sh} \pi n y, & 0 < y < q, \\ c_n \cos \pi n y + d_n \sin \pi n y, & -p < y < 0, \end{cases}$$

$$a_n = c_n = -\left( \frac{\pi n}{\Gamma(\alpha)} \operatorname{sh} \pi n q + \operatorname{ch} \pi n q \right) \beta_n, \quad b_n = d_n = -\left( \frac{\pi n}{\Gamma(\alpha)} \operatorname{ch} \pi n q + \operatorname{sh} \pi n q \right) \beta_n,$$

$$\beta_n = \frac{\Gamma(\alpha) \psi_n}{\delta_{pq}(n)}, \quad \psi_n = \int_0^1 \psi(x) \sin \pi n x dx, \quad E_{1/\alpha}(z, \mu) \text{ — известная функция Миттаг-}$$

Леффлера, которая имеет вид [8]:  $E_{1/\alpha}(z, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \mu)}$ ,  $\mu > 0$ .

### Литература

1. Ильин В.А. Единственность и принадлежность  $W_2^1$  классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения. // «Математические заметки». 1975. Т. 17, № 1 С. 93–103.
2. Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев – Бицадзе в прямоугольной области. // «Дифференциальные уравнения». 1978. Т.14. № 1 . С.136-139.
3. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. Об оценке решения одной задачи для параболо-гиперболического уравнения с помощью рядов Фурье. // «Дифференциальные уравнения». 2003. Т.39.№ 5. С.656-662.
4. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Москва : Наука, 2016. 271 с.

5.Салахитдинов М.С., Каримов Э.Т. Об одной нелокальной задаче с условиями сопряжения интегрального вида для парабола-гиперболического с оператором Капуто. // «Док. АН РУз». 2014. № 4. С.6-9.

6.Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Краевая задача для уравнения парабола - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области. // «Научный вестник. Математика». 2017. №5. С. 25-30.

7.Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh. On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. No. 9. P. 1801–1810.

8.Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005. 186

## **СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДРОБНЫМ ОПЕРАТОРОМ ГЕРАСИМОВА-КАПУТО**

*Б.И. Исломов<sup>1</sup>, И.А. Ахмадов<sup>2</sup>*

*<sup>1,2</sup>Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*

*[islomovbozor@yandex.ru](mailto:islomovbozor@yandex.ru)<sup>1</sup>, [ahmadov.ilhom@mail.ru](mailto:ahmadov.ilhom@mail.ru)<sup>2</sup>*

**Аннотация.** В данной работе исследуется задача с отходом от характеристики для парабола-гиперболического уравнения с оператором Герасимова – Капуто. Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи. Изучаются спектральные свойства аналога задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной.

В последние годы возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка. Основная библиография по этим вопросам содержится в книгах[1-4].

В работах [5-6] доказаны сильная разрешимость и вольтерровость краевых задач для уравнения смешанного типа целого порядка.

Заметим, что краевые задачи для уравнения параболического и параболого-гиперболического типов дробного порядка мало изучены. Отметим работы [7-9].

В настоящей работе изучается нелокальная краевая задача с условием Франкля для уравнения смешанного параболого-гиперболического типа, когда параболическая часть содержит оператор дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто.

Пусть  $\Omega \in R^2$  - конечная область, ограниченная при  $y > 0$  отрезками  $AA_0$ ,  $A_0B_0$ ,  $B_0B$  прямых  $x=0$ ,  $y=1$ ,  $x=1$  соответственно, а при  $y < 0$  характеристиками  $AC: x+y=0$  и  $BC: x-y=1$  уравнения

$$Lu = \begin{cases} {}_c D_{0x}^\alpha u - u_{yy}, & y \geq 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0 \end{cases} = f(x; y), \quad (1)$$

где

$${}_c D_{0x}^\alpha g = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-z)^{-\alpha} g'(z) dz, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1, \quad x > 0 \quad (2)$$

- интегральный оператор дробного порядка  $\alpha$  в смысле Герасимова-Капуто [3],  $f(x; y)$  - известная функция.

Через  $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$  обозначим пространство С.Л. Соболева с нормой  $\|\cdot\|_l$ ,  $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ ,  $L_2(\Omega)$  - пространство квадратично суммируемых функций в области  $\Omega$ ,  $J = \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}$ ,  $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x, y): x > 0, y > 0\}$ ,  $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y): x > 0, y < 0\}$ ,  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup J$ .

**Задача CF.** Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AA_0} = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u_y|_{A_0B_0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

и нелокальному краевому условиям:

$$a_1 u(\theta_0(t)) = a_2 u(\theta(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4)$$

и на линии  $J$  удовлетворяют условия сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u(x, y), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad (x, 0) \in J. \quad (5)$$

где  $\theta(t) = (t, 1)$ ,  $\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$ ,  $a_1$  и  $a_2$  - заданные числа.

**Определение 1.** Классическим решением задачи  $CF$  назовем функцию из класса  $P_1 = \{u(x, y) : u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C_y^2(\Omega_0) \cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_1)\}$ , удовлетворяющую краевым условиям (3) и (4) задачи  $CF$  и обращающую уравнение (1) в тождество.

Заметим, что из класса  $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$  с учетом (3) следует  ${}_c D_{0x}^\alpha u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_1)$ .

**Определение 2.** Функцию  $z(x, y) \in L_2(\Omega)$  назовем *сильным решением задачи  $CF$* , если существует последовательность функций  $z_n(x, y) \in P_1$ , удовлетворяющую краевым условиям (3), (4), (5) задачи  $CF$ , такая, что последовательности  $z_n(x, y)$  и  $Lz_n(x, y)$  сходятся в  $L_2(\Omega)$  к функциям  $z(x, y)$  и  $g(x, y)$  соответственно, т.е.

$$\|z_n(x, y) - z(x, y)\|_0 \rightarrow 0, \quad \|Lz_n(x, y) - g(x, y)\|_0 \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

**Теорема 1.** Пусть для  $n, m \in N$  существует такое  $\alpha = \frac{2n-1}{m}$ , что при

$r \in (0, 1]$  выполняется неравенство  $\frac{2}{2r+1} < \alpha < 1$ . Тогда для любой функции

$$\tilde{f}(x, y) = y^{-\mu} f(x, y), \quad \tilde{f}(x, y) \in L_2(\Omega), \quad f(0, 0) = 0, \quad \mu > \frac{1}{2} + \theta, \quad \theta \in (0, 1],$$

существует единственное сильное решение  $u(x, y)$  задачи  $CF$ . Это решение принадлежит классу

$$P_2 = \{u(x, y) : u(x, y) \in W_2^1(\Omega) \cap W_{2,x,y}^{1,2}(\Omega_1) \cap C(\bar{\Omega})\},$$

удовлетворяет неравенству

$$\|u(x, y)\|_1 \leq C \|\tilde{f}(x, y)\|_0. \quad (6)$$

и оно представимо в виде

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} K(x, y; x_1, y_1) f(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \equiv L^{-1} f(x, y), \quad (7)$$

где  $K(x, y; x_1, y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ .

**Теорема 2.** Обратный оператор задачи  $L^{-1}$  определяемый формулой (7) является Вольтерровым (т.е. вполне непрерывным и квазинильпотентным).

### Литература

1. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов А. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Ташкент. 1986.
2. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. Москва. 2006.
3. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва. 2005. 199 с.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.
5. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного парабола-гиперболического и смешанного-составного типов. Алматы. 2015. 224 с.
6. Садыбеков М. А. Спектральные свойства задачи Франкля типа для парабола-гиперболических уравнений. // Электронный журнал дифференциальных уравнений. 2018, No. pp. 1-11.
7. Каримов Э.Т. Краевые задачи с интегральными условиями сопряжения и обратные задачи для дифференциальных уравнений целого и дробного порядков. Дисс. Ташкент. 2020.

8. Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Краевая задача для уравнения парабола - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области. // Научный вестник. Математика. 2017. №5. С. 25-30.

9. B. I. Islomov and I. A. Akhmadov. A Nonlocal Boundary Value Problem with the Frankl Condition for an Equation of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type with the Fractional Gerasimov–Caputo Operator. // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 3, pp. 1508–1514.

**ЗАДАЧА С НЕПОЛНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ  
УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В  
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ**

*Каримов Камолиддин Туйчибоевич*

*Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан*

*[karimovk80@mail.ru](mailto:karimovk80@mail.ru)*

Рассмотрим уравнение

$$L_{\alpha\beta\gamma}u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0 \quad (1)$$

в области  $\Omega = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, b), z \in (0, c)\}$ , где  $a, b, c \in R^+$ . В зависимости от места нахождения параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  на числовой оси, для уравнения (1) в области  $\Omega$  формулируются разные краевые задачи.

Пусть  $\alpha, \beta, \gamma \in [1/2, +\infty)$ . Тогда однозначно решается

**Задача Е.** Найти ограниченную при  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0$  функцию  $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus \Delta_{xyz}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega)$ , удовлетворяющую условиям

$$L_{\alpha\beta\gamma}u = 0, (x, y, z) \in \Omega; \quad u(x, b, z) = \psi_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c];$$

$$u_x, u_z \in C(\bar{\Omega} \setminus \Delta_{xz}), \quad \text{ограничено при } x \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0;$$

$$u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c], \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b],$$

где  $\Delta_{xyz} = \{(x, y, z) : xyz = 0\}$ ,  $\Delta_{xz} = \{(x, z) : xz = 0\}$ ,  $\psi_2(x, z)$  – заданная функция.

В работе доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $\alpha, \gamma \in [k - 1/2, k + 1/2)$ ,  $k \in N$ ,  $\beta \in [1/2, +\infty)$  и функция  $\psi_2(x, z)$  удовлетворяет следующим условиям:

I.  $\psi_2(x, z) \in C_{x,z}^{2k+4, 2k+4}(\bar{\Pi})$ , где  $\Pi = \{(x, z) : 0 < x < a, 0 < z < c\}$ ;

II.  $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_2(x, z)|_{x=0} = 0$ ,  $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_2(x, z)|_{x=a} = 0$ ,  $\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_2(x, z)|_{z=0} = 0$ ,

$\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_2(x, z)|_{z=c} = 0$ ,  $j = \overline{0, 2k+2}$ .

Тогда, решение задачи E существует и определяется формулой

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z) \mathcal{G}_{nm}(y),$$

где  $\mathcal{G}_{nm}(y) = (y/b)^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) \psi_{2nm} / I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} b)$ ,

$$X_n(x) = x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\delta_{\alpha n} x/a), \quad n \in N, \quad (2)$$

$$Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\delta_{\gamma m} z/c), \quad m \in N, \quad (3)$$

$J_l(x)$  и  $I_l(x)$  – функция Бесселя порядка  $l$  первого рода и функция Бесселя мнимого аргумента [1] соответственно,  $\delta_{\alpha n}$  и  $\delta_{\gamma m}$  – соответственно нули

функции  $J_{\alpha-1/2}(x)$  и  $J_{\gamma-1/2}(x)$ ,  $\lambda_{nm} = (\delta_{\alpha n}/a)^2 + (\delta_{\gamma m}/c)^2$ ,

$$\psi_{2nm} = s_{nm} \int_0^c \int_0^a \psi_2(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz,$$

$$s_{nm} = \left[ 2/(ac J_{\alpha+1/2}(\delta_{\alpha n}) J_{\gamma+1/2}(\delta_{\gamma m})) \right]^2.$$

Отметим, что согласно работе [1], система собственных функций (2) и (3) ортогональна и полна соответственно в пространстве  $L_2(0, a)$  с весом  $x^{2\alpha}$  и в пространстве  $L_2(0, c)$  с весом  $z^{2\gamma}$ .

Единственность решения задачи E доказывается с помощью полноты системы собственных функций (2) в пространстве  $L_2(0, a)$  с весом  $x^{2\alpha}$  и системы собственных функций (3) в пространстве  $L_2(0, c)$  с весом  $z^{2\gamma}$ .

Аналогичные результаты в двумерных областях для уравнения с одной и двумя сингулярными коэффициентами получены в работах [2], [3].

### Литература

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. -798 с.
2. Пулькин С.П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстеда // Изв.вузов. Сер.: Математика. 1960. № 6(19). С. 214–225.
3. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, -2014. - 304 с.

## ПРОГНОЗ ГАЗСОДЕРЖАНИЯ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА В ПРОЦЕССЕ ДЕГАЗАЦИИ

*Карчевский А.Л.*

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*

*[karchevs@math.nsc.ru](mailto:karchevs@math.nsc.ru)*

В работе представлен способ определения газосодержания угольного пласта в процессе его дегазации.

Предложенный способ основан на решении обратной задачи для параболического уравнения с целью определения коэффициента диффузии.

Одна из трудностей решения этой задачи состоит в том, что линейные размеры области, в которой определено уравнение прямой задачи, значительно превышает диаметр скважины дегазации (например, длина и ширина

прямоугольной области может составлять 7-10 метров, диаметр скважины 5-10 сантиметров). По сути, прямая задача решается в перфорированной области. Предложен метод решения прямой задачи в такой области. Суть предложения состоит в том, что исходная прямая задача заменяется в некотором смысле эквивалентной прямой задачей, которая может быть решена быстрее, чем исходная прямая задача. Для определения постановки эквивалентной прямой задачи необходимо решить обратную задачу по определению правой части дифференциального уравнения специального вида. Эта обратная задача сводится к численному решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода типа свёртки. Точность решения предложенным методом сравнивалось с решением исходной прямой задачи, полученного конечно-разностным методом. Будут приведены примеры расчетов.

Работа выполнена в рамках госзадания (соглашение № FWNF-2022-0009).

## **НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.**

*Маманазаров Д.С.*

*Новосибирский государственный университет. Новосибирск, Россия*

*d.mamanazarov@g.nsu.ru*

Пусть  $Q$  есть прямоугольник  $(0, 1) \times (0, T)$  переменных  $x$  и  $t$ ,  $C(x, t)$ ,  $f(x, t)$  и  $\gamma(t)$  есть заданные функции, определенные при  $x \in [0, 1], t \in [0, T]$ .

В прямоугольнике  $Q$  рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxx} + C(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

**Нелокальная задача I.** Найти функцию  $u(x, t)$  являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (2)$$

$$u(1, t) = u_x(1, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) - \gamma(t)u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (3)$$

**Нелокальная задача II.** Найти функцию  $u(x, t)$  являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), а также условия

$$u_x(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad u(0, t) - \gamma(t)u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Нелокальные задачи I и II в случае  $\gamma(t) \equiv 0$  (т.е. когда они являются обычными локальными задачами) хорошо изучены, если же  $\gamma(t)$  есть ненулевая дирекция, то наоборот - практически не изучены.

Целью исследований является доказательство разрешимости нелокальных задач I и II в анизотропном пространстве  $W_2^{3,2}(Q)$ .

### Список литературы

1. Джураев Т. Д. "Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов". Ташкент: ФАН, 1986.
2. Кожанов А. И., Дюжева А. В., "Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка", Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 24:4 (2020), 607–620.
3. А. Л. Скубачевский, "Неклассические краевые задачи. I", СМФН, 26 (2007), 3–132.

## ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

*Меражов Н.И., Ашуров Р.Р.*

*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан*

*[talabanursaidjon@gmail.com](mailto:talabanursaidjon@gmail.com)*

В этой работе рассматриваем начально-краевую задачу для уравнения субдиффузии с дробной производной Капуто.

В области  $G = \{(x, y, t) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, -p < t < q\}$  рассмотрим следующее уравнение смешанного типа в двумерном случае:

$$\begin{cases} {}_c D_{0t}^\alpha u = \Delta u + f(x, y, t), t \geq 0, \\ u_{tt} = \Delta u + f(x, y, t), t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа по переменным  $x$  и  $y$ ,  $p > 0, q > 0$  — заданные вещественные постоянные, а  $f(x, y, t)$  — заданная непрерывная функция,

$${}_c D_{0t}^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{d}{dt} f(t), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

- дифференциальный оператор Капуто дробного порядка  $\alpha$  [1]. Обратите внимание, что дифференциальный оператор Капуто  ${}_c D_{0t}^\alpha (u(x, y, t)) = I_{0t}^\alpha \frac{\partial u}{\partial t}$  выражается с помощью интеграла Римана-Лиувилля дробного порядка [1].

$$I_{0t}^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau,$$

где  $\Gamma(\alpha)$  - гамма-функция Эйлера, ( $0 < \alpha < \infty$ ). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J &= \{(x, y, t): 0 < x < 1, 0 < y < 1, t = 0\}, \\ G_1 &= \{x > 0, y > 0, t > 0\}, \\ G_2 &= \{x > 0, y > 0, t < 0\}, \\ G &= G_1 \cap G_2 \cap J. \end{aligned}$$

В области  $G$  изучаем следующую задачу.

**Задача.** Найти функцию  $u(x, y, t)$  со следующими свойствами:

- 1)  $u(x, y, t) \in C(\bar{G}) \cap C^1(G_2 \cup J)$ ,  $t^{1-\alpha} u_t(x, y, t)$ ,  $t^{2-\alpha} u_{tt}(x, y, t) \in C^1(G_1 \cup J)$ ;
- 2)  $u_{tt}(x, y, t) \in C(G_2 \cup J)$ ,  $u_{xx}(x, y, t) \in C(G_1 \cap G_2 \cap J)$ ,  $u_{yy}(x, y, t) \in C(G_1 \cap G_2 \cap J)$ ,  ${}_c D_{0t}^\alpha u \in C(G_1 \cup J)$  и искомая функция удовлетворяет уравнению (1) в области  $G_j$  ( $j = 1, 2$ );
- 3) на плоскости  $J$  имеют место следующие условия склейки:

$$u(x, y, +0) = u(x, y, -0), \quad (x, y) \in J \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1-\alpha} u_t(x, y, t) = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x, y, t), \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{2-\alpha} u_{tt}(x, y, t) = \lim_{t \rightarrow -0} u_{tt}(x, y, t), \quad (x, y) \in J; \quad (5)$$

4)  $u(x, y, t)$  также удовлетворяет граничным условиям:

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0; \quad (6)$$

5) Пусть задано и следующее условие:

$$u(x, y, -p) = \varphi(x, y), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1. \quad (7)$$

Построим решения поставленной задачи с помощью спектрального метода и далее доказываем однозначную разрешимость (см.[2], [3]).

### Литература

1. Псху А. В. Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка. в журнале // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2002 Год. № 1(8) : 9 С. 76–78.
2. Durdiyev D. K. Merajova Sh. B. Inverse problem for an equation of mixed parabolic–hyperbolic type with a Bessel operator. в журнале // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2022 Год. № 16: 3 С. 394–402.
3. Islomov B. I. Ubaydullayev U. Sh. ICOn a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain. В журнале // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020 Год. № 41: 9 С. 1801–1810.

## О КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ ОДНОГО КЛАССА ВКСОДП С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*Расулов Хайдар Раупович,*

*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,*

*xrasulov71@mail.ru*

Теория квадратично-стохастических операторов (КСО) с дискретным временем была основана Бернштейном С.Н. [1]. Позднее это направление получило развитие и понятие теории двуполрой квадратично-стохастических

операторов было введено Любичем Ю.И. [2]. В его монографии подробно описаны постановка проблемы и общие методы решения. В [3] исследованы двуполые КСО, принадлежащие к подклассу КСО [2], и получены фундаментальные результаты с новым подходом. Также представлен и проанализирован частный случай двуполых КСО - шестнадцать так называемых крайних операторов (размерность популяции равно четыре).

Однако, непрерывный аналог таких крайних операторов не исследован.

В [2] введены и изучены общие эволюционные уравнения двуполой популяции. Пусть

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

называется  $(n - 1)$  – симплексом;  $p_{ik,j}^{(f)}$  и  $p_{ik,j}^{(m)}$  – коэффициенты наследственности. Величина  $p_{ik,j}^{(f)}$  определяется как вероятность рождения потомка женского типа  $F_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) у матери типа  $F_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) и отца типа  $M_k$  ( $1 \leq k \leq v$ ). Аналогично определяется  $p_{ik,l}^{(m)}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq k, l \leq v$ ). Из определения коэффициентов ясно, что

$$\begin{cases} p_{ik,j}^{(f)} \geq 0, \sum_{j=1}^n p_{ik,j}^{(f)} = 1, \\ p_{ik,l}^{(m)} \geq 0, \sum_{l=1}^v p_{ik,l}^{(m)} = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Состоянием популяции называется пара распределений вероятностей  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_v)$  на множествах  $\mathcal{F}$  – множество женских типов и  $\mathcal{M}$  – множество мужских:

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1; y_k \geq 0, \sum_{k=1}^v y_k = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, v}.$$

Пусть  $(x, y)$  – состояние в поколении  $G$  и в следующем поколении  $G'$  в момент его зарождения вероятности типов находятся по полной вероятности (уравнения эволюции двуполой популяции):

$$W := \begin{cases} x_j' = \sum_{i,k=1}^{n,v} p_{ik,j}^{(f)} x_i y_k, & 1 \leq j \leq n, \\ y_l' = \sum_{i,k=1}^{n,v} p_{ik,l}^{(m)} x_i y_k, & 1 \leq l \leq v. \end{cases} \quad (2)$$

В работе [3] вводится определение вольтеровский квадратично-стохастический оператор двуполой операции (далее в изложение статьи опираемся на это определение):

**Определение.** Эволюционный оператор (2) назовем вольтеровским квадратичным стохастическим оператором двуполой популяции (ВКСОДП), если коэффициенты наследственности (1) удовлетворяет условию

$$\begin{cases} p_{ik,j}^{(f)} = 0, \text{ если } j \notin \{l, k\} & 1 \leq i, \quad j \leq n, \quad 1 \leq k \leq v, \\ p_{ik,l}^{(m)} = 0, \text{ если } l \notin \{l, k\} & 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k, l \leq v. \end{cases}$$

В данной работе проведен качественный анализ непрерывный аналог этих крайних операторов (ВКСОДП) и найдены численные и аналитические решения. Также, в качестве частного случая приведено решение основной задачи. Аналитическое решение сравнено с численным решением с помощью графиков. Доказано, что траектория оператора стремится к положению равновесия. Исследованы неподвижные точки еще четырнадцати операторов и результаты составлены в виде таблицы.

Заметим, что численные методы обычно не дают хорошего качественного понимания поведения системы. Поэтому, по крайней мере как часть анализа динамических моделей, используем графические методы. Из-за простоты графических методов, наряду с их геометрической природой, графики дают нам возможность представить фундаментальные концепции моделирования,

используемые для динамических систем. Но здесь в основном требуется грамотно составить компьютерные программы, не затрагивающие много численных вычислений, отнимающих время.

Другие КСО с непрерывным временем исследованы в работах [4-5].

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С. Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследования // Уч. Зап. Научно-Исслед. каф. Укр. отд. Мат. – 1924. – 1. – С. 83 – 115.
2. Lyubich Yu. I. Mathematical structures in population genetics // Biomathematics. – 1992. – 22.
3. Розиков У.А., Жамилов У.У. Вольтерровские квадратичные стохастические операторы двуполой популяции // Укр. мат. журн., 2011, т. 63, № 7, стр. 985-988.
4. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics 30 (2022), no. 1, pp. 239-250 DOI: <https://doi.org/10.46298/cm.10528>.
5. Rasulov Kh. R.: On a continuous time F - quadratic dynamical system. Uzbek mathematical journal (4) (2018) pp. 126-130. DOI:10.29229/uzmj.2018-4-12.

### ОБ АНАЛИЗЕ ОДНОГО КЛАССА НЕВОЛЬТЕРРОВСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*Расулов Хайдар Раупович, Баходурова Мохинур Бахромовна,  
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,  
[xrasulov71@mail.ru](mailto:xrasulov71@mail.ru)<sup>1</sup>*

Квадратично стохастические операторы (КСО) невольтерровского типа часто возникает во многих моделях математической генетики [1]-[2]. КСО отображающий симплекс  $S^{m-1} = \{x = (x_1, \dots, x_m)\} \in \mathbb{R}^m: x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1$  в себя, имеет вид  $V: x'_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j, k = 1, \dots, m$ , где  $p_{ij,k}$  – коэффициент наследственности и  $p_{ij,k} \geq 0, \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1, i, j, k = 1, \dots, m$ . Заметим, что

каждый элемент  $x \in S^{m-1}$  является распределением вероятности на  $E = \{1, \dots, m\}$ .

В статье [2] для невольтерровского КСО (в статье [2] эти КСО называется  $F$  КСО. Заметим, что любой  $F$  КСО является невольтерровской)  $V: x = (x_1, \dots, x_m) \in S^{m-1} \rightarrow V(x) = x' = (x'_1, \dots, x'_m) \in S^{m-1}$  дается следующая общая формула:  $x'_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i)$ , где  $a_{ki} = 2p_{ik,k} - 1$  для  $i \neq k$  и  $a_{kk} = 0$ ,  $a_{ki} = -a_{ik}$  и  $|a_{ki}| \leq 1$ .

Рассмотрим случай  $m = 2$ , т.е.  $E_0 = \{0,1,2\}$ . Возьмём  $M = \{1\}$  и  $F = \{2\}$ . Тогда непрерывный аналог невольтерровский КСО имеет вид:

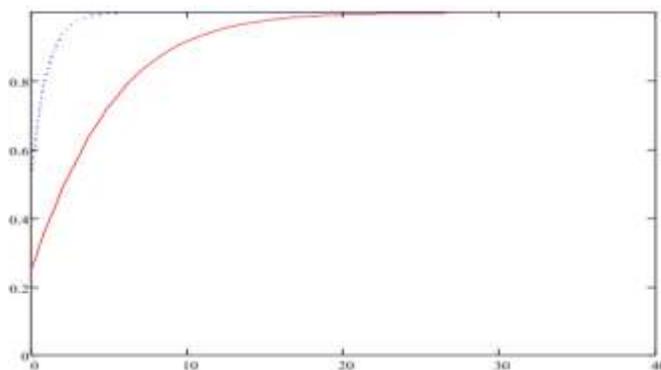
$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 1 - 2(1 - a)2x_1x_2 - x_0, \\ \dot{x}_1 = 2bx_1x_2 - x_1, \\ \dot{x}_2 = 2cx_1x_2 - x_2. \end{cases} \quad (1)$$

Следует отметить, что в статье [3] данная динамическая система (1) подробно анализирован, то есть, найдены неподвижные точки, установлены их типы, указано что, траектория  $(x_0(t), x_1(t), x_2(t))$  стремиться к неподвижной точке экспоненциально быстро. Также, найдены аналитические решения системы (1).

В данной работе с помощью математического редактора MathCAD при различных значениях  $a, b, c$  найдены численные решения системы (1). Проведен сравнительный анализ с аналитическими решениями системы.

Отметим, что возможность получать численные решения на компьютере повлекла за собой развитие многих аналитических подходов. При этом особое значение имеют качественные исследования, позволяющие описать в наиболее простом математическом виде особенности поведения системы.

Так, например графики численных и аналитических решений системы при значениях  $a = 0.2$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 0.3$  и при начальных значениях  $x_0(0) = 0.25$ ,  $x_1(0) = 0.34$ ,  $x_2(0) = 0.41$  выглядит так:



Сравнительный анализ результатов, полученных в [2] и в настоящей работе, показывает, что положения равновесия системы (1) через некоторое время совпадают с неподвижной точкой оператора [2], только когда  $x_0(t) \geq 0$ ,  $x_1(t) \geq 0$ ,  $x_2(t) \geq 0$  и  $x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) = 1$  и обе эти траектории стремятся к положению равновесия экспоненциально быстро.

**Примечание.** График численных решений системы (1) (значение  $x_1(t)$ ) изображен синим, а аналитических решений красным цветом.

Данная работа является продолжением работы [3].

#### *ЛИТЕРАТУРА*

1. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике, Науководумка, Киев, 1983.
2. Розиков У.А., Жамилов У.У. F-квадратичные стохастические операторы //Математические заметки, 83:4 (2008).
3. Rasulov Kh.R. On a continuous time F – quadratic dynamical system, Uzbek mathematical journal, №4 (2018), pp.126-130.

### **О КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ**

*Расулов Х.Р., Музаффарова М.У.*

*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,*

*xrasulov71@mail.ru<sup>1</sup>*

Представление математической модели ряда биологических, физико-химических и экономических процессов с помощью квадратично-

стохастических операторов (КСО) вызывает интерес у математиков в этой области. В настоящее время опубликовано множество научных работ по этому направлению [1-3].

Некоторые динамические системы, порожденные КСО с дискретным временем, возникают следующим образом. Рассмотрим популяцию, состоящую из разновидностей. Пусть распределение вероятности разновидностей в начальных поколениях и вероятность того, что индивиды с той и той разновидностями скрещиваются, чтобы произвести индивид. Тогда распределение вероятности (состояние) разновидностей в первом поколении может быть найдено с полной вероятностью. Это означает, что соответствие определяет отображение, названное эволюционным оператором. Популяция развивается, начинаясь с произвольного состояния, и переходя к состоянию (в следующем поколении) и к состоянию, и так далее.

Рассмотрение эволюции требует привлечения времени. В зависимости от задачи может рассматриваться или непрерывное время (когда интересуют состояния системы в каждый момент), или дискретное (когда интересуют состояния системы в отдельные изолированные моменты времени). Решить задачу численно для всех возможных значений параметров принципиально невозможно. Поэтому необходимы методы, которые позволят проанализировать поведение решений динамической системы без применения компьютера.

В [3] исследованы двуполые КСО, принадлежащие к подклассу КСО [2], и получены фундаментальные результаты с новым подходом. Также представлен и проанализирован частный случай двуполых КСО – шестнадцать так называемых крайних операторов (размерность популяции равно четыре).

В данной статье изучается непрерывный аналог одного квадратично-стохастического оператора введенного в [3] (см.  $W_2(x_1, x_2; y_1, y_2)$ ), который непрерывный аналог имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 y_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 y_2 - x_2, \\ \dot{y}_1 = x_1 - y_1, \\ \dot{y}_2 = x_2 - y_2. \end{cases} \quad (1)$$

Проведен качественный анализ системы (1), исследованы неподвижные точки и определены их типы. Найдены численные решения с помощью математического редактора MathCAD.

Найти аналитические решения системы (1) с теоретической точки зрения не удалось.

Данная работа является продолжением работы [4].

#### *ЛИТЕРАТУРА*

1. Бернштейн С. Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследования // Уч. Зап. Научно-Исслед. каф. Укр. отд. Мат., 1924, с. 83-115.
2. Lyubich Yu. I. Mathematical structures in population genetics // Biomathematics. – 1992. – 22.
3. Розиков У.А., Жамилов У.У. Вольтерровские квадратичные стохастические операторы двуполой популяции // Укр. мат. журн., 2011, т. 63, №7, с. 985-988.
4. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

### **О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА С КВАТЕРНИОННЫМ ПАРАМЕТРОМ**

*Сатторов Э.Н. \*, Рустамов С.У. \*\**

*\* Узбекско-Финский педагогический институт ,*

*\*\*Навоинский государственный педагогический институт*

*[Sattorov-e@rambler.ru](mailto:Sattorov-e@rambler.ru), [Sohibjon\\_17@mail.ru](mailto:Sohibjon_17@mail.ru)*

$R^3$  -вещественное трехмерное евклидово пространство,

$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, x' = (x_1, x_2, 0), y' = (y_1, y_2, 0) \in R^2,$   
 $s = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, r^2 = |y - x| = s + (y_3 - x_3)^2, \Omega$ - ограниченная односвязная  
 область в  $R^3$  с границей  $\partial\Omega$  состоящей из компактной связной части  $T$   
 плоскости  $y_3 = 0$  и гладкого куска поверхности  $S$  Ляпунова, лежащей в  
 полупространстве  $y_3 \geq 0, \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \partial\Omega = S \cup T.$

Рассмотрим систему уравнений [1]

$$\alpha_0 f_0 - \operatorname{div} f - \langle f, \vec{\alpha} \rangle = 0, \operatorname{grad} f_0 + \operatorname{rot} f + [f \times \vec{\alpha}] + f_0 \vec{\alpha} + \alpha_0 f = 0 \quad (1)$$

где  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_k \in C, k = 0, 1, 2, 3; f = (f_1, f_2, f_3), f_0$ - векторная и  
 скалярная функции соответственно.

На кватернионнозначных функциях вида  $F(x) = \sum_{k=0}^3 f_k(x) i_k, x \in \Omega \subset R^3,$   
 $f_k(x) \in C^1(\Omega), k = 0, 1, 2, 3$  определим оператор  $D_\alpha F := (D + M^\alpha)F$ , где  $D := \sum_{k=1}^3 i_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ -  
 оператор, обобщающий двумерный оператор Коши-Римана (см. например [2]);  
 $M^\alpha F := F\alpha$ . Тогда уравнение  $D_\alpha F = 0$  является эквивалентной записью системы  
 (1).

**Задача.** Требуется определить регулярное решение  $F(y)$  системы (2.2) в области  $\Omega$ , исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности  $S$ :

$$F(y)|_S = g(y), y \in S, \quad (2)$$

где  $g(y) = \sum_{k=0}^3 g_k(y) i_k$  - заданная непрерывная кватернионно-значная функция.

Когда  $\alpha \in C$ , т.е.  $\alpha \equiv \alpha_0$ , фундаментальное решение  $G_\alpha$  оператора  $D_\alpha$  может быть найдено по формуле (ср. [2] с. 76)

$$G_\alpha(x) = -[D_{-\alpha} h_\alpha](x) = h_\alpha(\alpha - x|x|^{-2} + i\alpha x|x|^{-1}), \quad (3)$$

где  $h_\alpha(x) := -(4\pi|x|)^{-1} e^{-i\alpha|x|}$ - фундаментальное решение оператора Гельмгольца  $\Delta + \alpha^2 I$  (см. например, [3]).

Обозначим  $P^+F := (2\gamma)^{-1}F(\gamma + \hat{\alpha})$ ,  $P^-F := (2\gamma)^{-1}F(\gamma - \hat{\alpha})$ .

Тогда справедливо следующее непосредственно проверяемое равенство:

$$D_\alpha F = D_\xi P^+ F + D_\zeta P^- F \quad (4)$$

где  $\xi = \alpha_0 + \gamma$ ,  $\zeta = \alpha_0 - \gamma$ ,  $\gamma \in C$ ,  $\gamma^2 = \hat{\alpha}^2$ .

Заметим, что операторы  $P^+$  и  $P^-$  являются взаимно дополнительными проекторами, коммитирующими с операторами  $D_\xi$  и  $D_\zeta$ .

**Определение 1.** Функция

$$G_\alpha := \begin{cases} P^+ G_\xi + P^- G_\zeta; & \alpha \notin \mathfrak{R} \text{ и } \hat{\alpha}^2 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} [G_{\alpha_0}] \hat{\alpha}, & \alpha \notin \mathfrak{R} \text{ и } \hat{\alpha} = 0, \\ P^+ G_{2\alpha_0} + P^- G_0, & \alpha \in \mathfrak{R} \text{ и } \alpha_0 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + h_0 \alpha, & \alpha \in \mathfrak{R} \text{ и } \alpha_0 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

является фундаментальным решением оператора  $D_\alpha$ .

Рассмотрим

$$K_\alpha := P^+ K_\xi + P^- K_\zeta = -\frac{(\gamma + \hat{\alpha})}{2\gamma} [D_{-\xi} \Phi_\xi](x) - \frac{(\gamma - \hat{\alpha})}{2\gamma} [D_{-\zeta} \Phi_\zeta](x) \quad (6)$$

$$\Phi_\xi(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \text{Im} \left[ \frac{K(i\sqrt{u^2 + s + y_3})}{i\sqrt{u^2 + s + y_3 - x_3}} \right] \frac{ch(\gamma + \hat{\alpha})u}{\sqrt{u^2 + s}} du, \quad (7)$$

$$D_{-\xi} \Phi_\xi(x) = (D\Phi_\xi + \Phi_\xi \cdot \xi) = \sum_{k=1}^3 i_k \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x_k} + \Phi_\xi \cdot \xi, \quad (8)$$

**Теорема 1** (интегральная формула Коши). Пусть  $f \in \ker D_\alpha \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $\alpha \in Q$ . Тогда

$$(K_\alpha F)(x) = F(x), \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

**Определение 2.** Функцией Карлемана задачи (1), (2) называется функция

$M_\alpha^\sigma$ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$1) K_\alpha^\sigma(x, y) = G_\alpha(x, y) + N_\alpha^\sigma(x, y),$$

где  $\sigma$  – положительный числовой параметр, функция  $N_\alpha^\sigma(x, y)$  по переменной  $y$  удовлетворяет системе (2.2) всюду в области  $\Omega$ ,  $G_\alpha(x, y)$  – фундаментальных решений оператора  $D_\alpha$ ;

2)  $\int_T |K_\alpha^\sigma| dS_y \leq \varepsilon(\sigma)$  при фиксированном  $x \in \Omega$ , где  $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ ; здесь и далее  $|K_\alpha^\sigma|$  означает евклидову норму, где

$$K_\alpha F = \begin{cases} P^+ K_\varepsilon F + P^- K_\varepsilon F, & \alpha \notin \mathfrak{R} \text{ и } \hat{\alpha} \neq 0, \\ K_{\alpha_0} F + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} [K_{\alpha_0} F], & \alpha \notin \mathfrak{R} \text{ и } \hat{\alpha}^2 = 0, \\ P^+ K_{2\alpha} F + P^- K_0 F, & \alpha \in \mathfrak{R} \text{ и } \alpha_0 \neq 0, \\ K_0 F - V_0 F \alpha, & \alpha \in \mathfrak{R} \text{ и } \alpha_0 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$(K_\alpha F)(x) := - \int_{\partial\Omega} K_\alpha(x-y)n(y)F(y)dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \partial\Omega, \quad (11)$$

$$(V_\mu F)(x) := \int_{\partial\Omega} h_\mu(x-y)n(y)F(y)dS_y, \quad \mu \in C, \quad x \in R^3, \quad (12)$$

$n(y)$  - внешняя нормаль к  $\partial\Omega$  в точке  $y$ .

Положим

$$F_\sigma(x) = (\mathfrak{T}_\alpha^\sigma F)(x) := - \int_S K_\alpha^\sigma(x-y)n(y)g(y)dS_y, \quad x \in \Omega. \quad (13)$$

**Теорема 2.** Пусть  $F \in \ker D_\alpha \cap C(\overline{\Omega})$ ,  $\alpha \in \mathcal{Q}$ . На части  $T$  границы  $\partial\Omega$  удовлетворяет условию

$$|F(y)| \leq B, \quad (14)$$

где  $B$  – заданное положительное число. Тогда для любого  $x \in \Omega$  и  $\sigma > 0$  справедливо неравенство

$$|F(x) - F_\sigma(x)| \leq BC(\sigma, \alpha)e^{-\sigma x_3^2}. \quad (15)$$

### Литература

1. Кравченко В.В., Шапиро М.В. Об обобщенной системе уравнений Коши-Римана с кватернионным параметром // ДРАН, 1993, т. 329, №5. С.

2. Klaus Gurlbeck, Wolfgang Sprobig Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems – Basel; Boston; Berlin : Birkhauser, 1990.
3. В.С.Владимиров Уравнения математической физики.М.:Наука, 1988. 512 с.

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛАПЛАСОВА ПОЛЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

<sup>1</sup>Сатторов Э.Н., <sup>2</sup>Темирова Д.

<sup>1</sup> Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан

<sup>2</sup> Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

[Sattorov-e@rambler.ru](mailto:Sattorov-e@rambler.ru)

Пусть  $R^3$  ( $n \geq 3$ ) – вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \quad x' = (x_1, x_2), \quad y' = (y_1, y_2) \in R^2,$$

$$s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = |y - x|^2 = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2.$$

$\Omega$  ограниченная область в  $R^3$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ . В области  $\Omega$  задано непрерывно дифференцируемая вектор-функция  $\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$ .

Рассмотрим системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\operatorname{div} \vec{F}(x) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{F}(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

где  $\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$ , всюду в  $\Omega$  удовлетворяет векторному уравнению Лапласа  $\Delta \vec{F} = 0$ .

**Задача.** Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности  $S$ :

$$\vec{F}(y)|_S = \vec{f}(y), \quad y \in S, \quad (6)$$

$\vec{f}(y) = (f_1(y), f_2(y), f_3(y), f_4(y))$  – заданная непрерывная вектор-функция.

Требуется восстановить вектор-функции  $\vec{F}(x)$  в  $\Omega$ , исходя из заданной  $\vec{f}(y)$ ,

т. е. решить – задачу аналитического продолжения решения системы (1) в пространственной области по ее значениям на гладком куске  $S$  границы.

Пусть  $\vec{F}(x)$  в  $\Omega$  непрерывна вместе со своей производной вплоть до границы  $\partial\Omega$  и  $\Phi_0(y, x) = \frac{1}{4\pi|y-x|}$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа. Тогда справедлив *трехмерный аналог интегральной формулы Коши* [1],

$$\int_{\partial\Omega} M(y, x) \vec{F}(y) dS_y = \begin{cases} \vec{F}(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2)$$

здесь

$$M_\sigma(y, x) = \Phi_\sigma(y, x) \begin{vmatrix} \alpha(y_1 - x_1) + \beta(y_2 - x_2), & \beta(y_1 - x_1) - \alpha(y_2 - x_2), & \gamma(y_1 - x_1) - \alpha(y_3 - x_3) \\ \alpha(y_2 - x_2) - \beta(y_1 - x_1), & \alpha(y_1 - x_1) + \beta(y_2 - x_2), & \gamma(y_2 - x_2) - \beta(y_3 - x_3) \\ \alpha(y_3 - x_3) - \gamma(y_1 - x_1), & \beta(y_3 - x_3) - \gamma(y_2 - x_2), & \alpha(y_1 - x_1) + \beta(y_2 - x_2) \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} \gamma(y_3 - x_3), & 0, & 0 \\ 0, & \gamma(y_3 - x_3), & 0 \\ 0, & 0, & \gamma(y_3 - x_3) \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где

$$2\pi^2 e^{\sigma x_3^2 + \sigma \alpha^2 - \sigma y_3^2} \cdot \Phi_\sigma(y, x) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(y, x; u)}{u^2 + r^2} e^{-\sigma u^2} du, \quad (4)$$

$$\varphi_\sigma(y, x; u) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - (y_3 - x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma y_3. \quad (5)$$

**Теорема.** Пусть вектор-функция  $\vec{F}(y)$  класса  $H(\Omega)$  удовлетворяет условию (6). Тогда для любого  $x \in \Omega$  справедливо неравенство

$$|\vec{F}(x) - \vec{F}_{\sigma\delta}(x)| \leq \psi_1(\sigma) B^{1 - \frac{x_3^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_3^2}{a^2}}, \quad (7)$$

где

$$\psi_1(\sigma) = \frac{3}{\pi} \left[ 2b\sqrt{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{3\sigma}} + \sqrt{\sigma} \right) + 2 + a(1+3b)\sqrt{\pi\sigma} \right]. \quad (8)$$

**Следствие.** Для любого  $x \in \Omega$  справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \vec{F}_\sigma(x) = \vec{F}(x), \quad (9)$$

причем предел достигается равномерно на компактах из  $\Omega$ .

### Литература

1. Бицадзе А.В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. -17:6. – С.525-538.

### О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

<sup>1</sup>Сатторов Э.Н., <sup>2</sup>Эрмаматова З.Э., <sup>3</sup>Рафииков Н. В.

<sup>1</sup> *Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан*

<sup>2</sup> *Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета, Самарканд, Узбекистан*

<sup>3</sup> *Навоинский государственный педагогический институт, Наваи, Узбекистан*

[Sattorov-e@rambler.ru](mailto:Sattorov-e@rambler.ru), [ermamatova@mail.ru](mailto:ermamatova@mail.ru)

Хорошо известно, многие физические задачи приводятся к стационарному уравнению математической физики. С точки зрения анализа, что основные свойство гармонических, субгармонических и супергармонических функций используются при изучении разрешимости классической задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Уравнения Лапласа и его неоднородная форма – уравнение Пуассона являются основной моделью линейных эллиптических уравнений.

Пусть  $R^2$  вещественное двумерное евклидово пространство и  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2) \in R^2$ ,  $\alpha^2 = (y_2 - x_2)^2$ ,  $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$

$\Omega$  - ограниченная односвязная область в  $R^2$  с границей  $\partial\Omega$  состоящей из отрезка  $a_1 \leq y_2 \leq b_1$  и гладкой дуги кривой  $S$  Ляпунова, лежащей в полуплоскости  $y_2 \geq 0$ .

В работе рассматривается задача восстановления решения уравнения Пуассона [3], [4]

$$-\Delta U(x) \equiv -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = f(x), \quad (1)$$

в области по ее известным значениям и значениям ее нормальной производной на части границы

$$\begin{cases} U(x) = f_1(x), & x \in S, \\ \frac{\partial U(x)}{\partial \nu} = f_2(x), & x \in S, \end{cases} \quad (2)$$

т.е. дается явная формула продолжения решения задачи Коши.

Решение задачи Коши (1)-(2) будем строить в области  $\Omega$ , когда данные Коши заданы на части  $S$  границы. Задача Коши для уравнения Пуассона относится к числу некорректно поставленных задач [1], [2].

Будем предполагать, что решение задачи существует (тогда оно единственно) и принадлежит классу  $H(\Omega) \cap C(\Omega)$  и данные Коши заданы точно. В этих условиях устанавливается явная формула продолжения, которая является аналогом классической формулы Б. Римана, В. Вольтера и Ж. Адамара, построенной ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений. Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданным отклонением в равномерной метрике, при этом если решение и его нормальная производная ограничены на части  $T$  границы заданным положительным числом, то предлагается явная формула регуляризации.

Метод получения указанных результатов основан на конструкции в явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при

стремлении параметра к бесконечности на  $T$ , когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве  $y_m > 0$  ( $m = 2,3$ ). Следуя М. М. Лаврентьеву, фундаментальное решение с указанным свойством назовем функцией Карлемана для полупространства [1]. После построения функции Карлемана в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши, выписываются в виде разности обобщенных потенциалов простого и двойного слоев. Полученная формула продолжения позволяет сформулировать критерий разрешимости задачи Коши.

Классическая интегральная формула Грина показывает, что любая функция из  $C^2(\bar{\Omega})$  в области [5, с. 26] с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$  может быть представлена в виде суммы гармонической функции и ньютонова потенциала от ее лапласиана. Поэтому неудивительно, что изучение уравнения Пуассона в значительной степени может быть осуществлена с помощью изучения ньютонова потенциала  $f$ . Если, функцию  $f$  предполагать только непрерывной, то ньютонов потенциал

$$W(x) = \int_{\Omega} h(y-x)f(y)dy, \quad (3)$$

где  $h(y-x) = \frac{1}{2\pi} \ln|y-x|$  фундаментальное решение уравнения Лапласа, может не быть дважды дифференцируемым. Классом функций полезным и удобным при изучении ньютонова потенциала, является класс непрерывных функций по Гёльдеру.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа М.: Наука, 1978. - 352 с.
2. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. -Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1990. - 248 с.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.1989. -424 с.
4. Уэрмер Дж. Теория потенциала М.: Мир., 1980. - 136 с.

5. Гилбар Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка М. Наука, 1989. – 464 с.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МКДФ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

*Собиров Ш.К<sup>1</sup>., Жуманазарова Ш.О<sup>2</sup>., Матякубов Ж.Ш<sup>3</sup>.*

<sup>1,2,3</sup>*Ургенчский государственный университет,*

*shexzod1994@mail.ru, shodiyajumanazarova93@gmail.com,*

*matyakubov0134@gmail.com.*

В данной работе рассматривается следующая система уравнений

$$u_t + p(t)(6u^2u_x + u_{xxx}) + q(t)u_x = i \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_1^2 - \phi_2^2) d\eta, \quad (1)$$

$$L(t)\phi = \eta\phi, \quad x \in R,$$

где  $p(t)$  и  $q(t)$  заданные непрерывно дифференцируемые функции. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

где  $\phi = (\phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t))^T$  обладает следующей асимптотикой

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} h(\eta, t)e^{-i\eta x} \\ h(\eta, t)e^{i\eta x} \end{pmatrix} \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (3)$$

Здесь  $h(\eta, t) = h(-\eta, t)$  непрерывная функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\eta, t)|^2 d\eta < \infty \text{ при } t \geq 0. \quad (4)$$

В рассматриваемой задаче начальная функция  $u_0(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) обладает следующими свойствами:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|u_0(x)| dx < \infty. \quad (5)$$

2) Оператор  $L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$  в верхней полуплоскости комплексной

плоскости имеет ровно  $N$  собственных значений  $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)$  с кратностями  $m_1(0), m_2(0), \dots, m_N(0)$  и не имеет спектральных особенностей.

Предположим, что функция  $u(x, t)$  обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при  $x \rightarrow \pm\infty$ , т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( (1 + |x|) |u(x, t)| + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Основная цель данной работы – получить представления для решений  $u(x, t), \phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t)$  задачи (1)–(6) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора  $L(t)$ .

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Если функции  $u(x, t), \phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t)$  является решением задачи (1)–(6), то данные рассеяния несамосопряженного оператора  $L(t)$  с потенциалом  $u(x, t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} r_t^+ &= \left( 8i\xi^3 p(t) - 2i\xi q(t) + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{\eta + \xi} d\eta - 2i\pi h^2(\xi, t) \right) r^+, \quad (\text{Im } \xi = 0), \quad \frac{d\xi_k}{dt} = 0, \\ \frac{d\chi_0^n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)(1 + r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_0^n, \\ \frac{d\chi_1^n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)(1 + r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_1^n + \\ &+ \left( 24i\xi_n^2 p(t) - 2iq(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^2(1 + r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_0^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\chi_2^n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_2^n + \\
&+ \left( 24i\xi_n^2 p(t) - 2iq(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^2(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_1^n + \\
&+ \left( 24i\xi_n p(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_0^n, \\
\frac{d\chi_3^n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_3^n + \\
&+ \left( 24i\xi_n^2 p(t) - 2iq(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^2(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_2^n + \\
&+ \left( 24i\xi_n p(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^2(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_1^n + \\
&+ \left( 8ip(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^4(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_0^n, \\
\frac{d\chi_l^n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_l^n + \\
&+ \left( 24i\xi_n^2 p(t) - 2i\xi_n q(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^2(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_{l-1}^n + \\
&+ \left( 24i\xi_n p(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^3(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_{l-2}^n + \\
&+ \left( 8ip(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^4(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_{l-3}^n + \\
&+ \sum_{s=0}^{l-4} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^{l-s} h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^{l-s+1} (1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_s^n, \quad n = \overline{1, N}, \quad l = \overline{4, m_n - 1}.
\end{aligned}$$

Полученные равенства позволяют применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(5).

### Литература

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J. Phys. Soc. Japan. 1972, vol.32, P.1681.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М: Мир. 1988, С. 697.
3. Khasanov A.B., Hoitmetov U.A, On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2021, pp.19–35.

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА.

*Т.Г. Сюнова, Ж.Ш. Мамаюсупов*  
*Ферганский политехнический институт, Фергана, Узбекистан*

[jamshidmamayusup03@gmail.com](mailto:jamshidmamayusup03@gmail.com)

Пусть  $a_i, b_i$  ( $i=1,2$ ) действительные числа, причем  $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$  ( $i=1,2$ ) и  $\Omega = \{(x_1, x_2) : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$ .

Как в работе [1,2] введем оператор дробного интегро-дифференцирования порядка  $(\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$D_{a_1, a_2; x_1, x_2}^{\alpha_1; \alpha_2} \varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha_1)\Gamma(-\alpha_2)} \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{\varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2}{(x_1 - t_1)^{\alpha_1+1} (x_2 - t_2)^{\alpha_2+1}}, & \alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0, \\ \varphi(x_1, x_2), & \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \\ \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} D_{a_1, a_2; x_1, x_2}^{\alpha_1 - n_1; \alpha_2 - n_2} \varphi(x_1, x_2), & \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \\ & (\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 < 0 \text{ ёки } \alpha_1 < 0, \alpha_2 \geq 0). \end{cases} \quad (1)$$

Где  $\Gamma(z)$ - гамма функция Эйлера [1],  $n = n_1 + n_2$ ,

$$n_i = \begin{cases} [\alpha_i] + 1, & \text{агар } \alpha_i > 0 \\ 0, & \text{агар } \alpha_i \leq 0 \end{cases}, \quad i=1,2.$$

Интегральное преобразование Меллина функций  $\varphi(x_1, x_2)$   $x_1 > 0, x_2 > 0$  определяется формулой

$$\varphi^*(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{s_1-1} t_2^{s_2-1} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (2)$$

а обратное интегральное преобразование Меллина осуществляется с помощью равенство

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty} \int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty} \varphi^*(s_1, s_2) x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} ds_1 ds_2, \quad \gamma_i = \operatorname{Re} s_i, i=1,2 \quad (3)$$

Если знаком  $\leftrightarrow$  обозначить соответствие между функций и ее интегральное преобразование Меллина, то легко установить формулы:

$$\begin{aligned} \varphi(k_1 x_1, k_2 x_2) &\leftrightarrow k_1^{-s_1} k_2^{-s_2} \varphi^*(s_1, s_2), \quad x_1^{k_1} x_2^{k_2} \varphi(x_1, x_2) \leftrightarrow \varphi^*(s_1 + k_1, s_2 + k_2); \\ \varphi(x_1^{p_1}, x_2^{p_2}) &\leftrightarrow |p_1|^{-1} |p_2|^{-1} \varphi^*\left(\frac{s_1}{p_1}, \frac{s_2}{p_2}\right), \quad p_i \neq 0, p_2 \neq 0 \quad \varphi(x_1^{-1}, x_2^{-1}) \leftrightarrow \varphi^*(-s_1, -s_2). \end{aligned}$$

Имеет места

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$   $x_1^{s_1-\alpha_1-1} x_2^{s_2-\alpha_2-1} \varphi(x_1, x_2) \in L_1(\Omega)$ , тогда справедлива формула

$$D_{a_1, a_2; x_1, x_2}^{\alpha_1, \alpha_2} \varphi(x_1, x_2) \leftrightarrow \frac{\Gamma(1+\alpha_1-s_1)\Gamma(1+\alpha_2-s_2)}{\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_2)} \varphi^*(s_1-\alpha_1, s_2-\alpha_2), \quad (4)$$

$$s_1 + \alpha_1 < 1, s_2 + \alpha_2 < 1.$$

**Теорема 2.** Пусть  $0 < \alpha_i < 1$  ( $i=1,2$ )  $x_1^{s_1+\alpha_1-1} x_2^{s_2+\alpha_2-1} \varphi(x_1, x_2) \in L_1(\Omega)$ . Тогда формула (4) справедлива при  $s_1 < 1-\alpha_1, s_2 < 1-\alpha_2$  и условиях

$$x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \left( D_{0.0; x_1, x_2}^{\alpha_1, \alpha_2} \varphi \right) = 0 \text{ при } x_i = 0, x_i = \infty ; i=1,2.$$

### Литература

1. Ёринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. – Фарғона, 2012. 112 б.

2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев И.О. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

3. Kosimov K., Mamayusupov J. Transitions melline integral of fractional integrodifferential operators //Scientific Bulletin of Namangan State University. – 2019. – Т. 1. – №. 1. – С. 12-15.

4. Мамаюсупов Ж. Ш. Интегральное преобразование Меллина для оператора интегродифференцирования дробного порядка //Periodica Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities. – 2022. – Т. 11. – С. 186-188..

## **О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

*Умаров Рахматилла Акрамович*

*Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан,*

*r.umarov1975@mail.ru*

В области  $D = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < q\}$  рассмотрим следующее уравнение третьего порядка в виде

$$L(u) = U_{xxx} - U_{yy} + A_1(x)U_{xx} + A_2(x)U_x + A_3(x)U + A_4U_y = g_1(x, y), \quad (1)$$

где  $p, q, A_4 \in R, A_i(x), i = \overline{1, 3}, g_1(x, y)$  заданная, достаточно гладкая функция.

Заменой

$$U(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{3} \int_0^x A_1(\xi) d\xi + \frac{A_4}{2} y\right) u(x, y),$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx} - u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(x)u = g(x, y), \quad (2)$$

где

$$a_1(x) = -A_1'(x) - \frac{1}{3}A_1^2(x) + A_2(x),$$

$$a_2(x) = -\frac{1}{3}A_1''(x) + \frac{2}{27}A_1^3(x) - \frac{1}{3}A_1(x)A_2(x) + A_3(x) + \frac{A_4^2}{4},$$

$$g(x, y) = \exp\left(\frac{1}{3}\int_0^x A_1(\xi)d\xi - \frac{A_4}{2}y\right)g_1(x, y).$$

**Задача  $B_3$ .** Найти функцию  $u(x, y)$  из класса  $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$ , удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} \alpha u(x, 0) + \beta u_y(x, 0) = 0, \\ \gamma u(x, q) + \delta u_y(x, q) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq p, \quad (3)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u_x(p, y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq q, \quad (4)$$

где  $\psi_i(y), i = \overline{1, 3}$ ,  $g(x, y)$  заданные функции.

В работах [1-3] решение поставленной задачи для уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами было найдено с другими краевыми условиями.

**Теорема.** Если задача  $B_3$  имеет решение, то при выполнении условий  $a_1(x) \geq 0, a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \geq 0, \alpha\beta \leq 0, \gamma\delta \geq 0$  оно единственно.

### Литература

1. Араков У. Р., Умаров Р. А. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function, Lobachevskii Journal of Mathematics, 43:3 (2022), 738–748.
2. Араков У.Р., Умаров Р.А. Construction of a solution of the boundary-value problem for the third-order equation with lower terms by using Green's function // Nonlinear Oscillations. 25 (2022), No. 2, pp. 161-173.

3. Aраков Ю.Р., Умаров Р.А. On the third boundary problem for a nonhomogeneous third order equation with multiple characteristics// Uzbek Mathematical Journal. 2023, Volume 67, Issue 1, pp.4-14.

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕГО ИНТЕГРО-  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ДРОБНОГО ПОРЯДКА С  
ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ**

*Уринов А.К., Усмонов Д.А.*

*Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан*

*[urinovak@mail.ru](mailto:urinovak@mail.ru), [usmonov-doniyor@inbox.ru](mailto:usmonov-doniyor@inbox.ru)*

В данной работе в области  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  рассмотрим следующее вырождающееся уравнение второго порядка

$${}_c D_{0t}^{\delta, \gamma} u(x, t) + bu(x, t) = \left[ x^\alpha (1-x)^\beta u_x(x, t) \right]_x + f(x, t), \quad (1)$$

где  ${}_c D_{0t}^{\delta, \gamma} u(x, t)$  - дробный дифференциальный оператор типа оператора Капуто с функцией Бесселя в ядре [1] от функции  $u(x, t)$  по аргументу  $t$ :

$${}_c D_{0t}^{\delta, \gamma} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \int_0^t (t-z)^{1-\delta} \bar{J}_{(1-\delta)/2} [\gamma(t-z)] \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2 \right) u(x, z) dz; \quad (2)$$

$\bar{J}_\nu(z)$  - функция Бесселя - Клиффорда, определяемая равенствами

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) (z/2)^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k},$$

$(z)_k$  - символ Похгаммера,  $\Gamma(x)$  - гамма-функция Эйлера [2],  $J_\nu(x)$  - функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$  [3];  $f(x, t)$  - заданная функция, а  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, b \in R$  - заданные числа, причем  $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 1 < \delta < 2, b \geq 0$ .

Очевидно, что уравнение (1) вдоль линий  $x = 0$  и  $x = 1$  вырождается.

**Задача  $A_{pq}$ .** Найти функцию  $u(x,t)$ , обладающую следующими свойствами: 1)  $u(x,t), x^\alpha(1-x)^\beta u_x, u_t \in C(\bar{\Omega}), {}_c D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t) \in C(\Omega), [x^\alpha(1-x)^\beta u_x]_x \in C(\Omega)$ ; 2) в области  $\Omega$  удовлетворяет уравнению (1); 3) выполняются следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), u_t(x,0) = \varphi_2(x), x \in [0,1]; \quad (3)$$

$$pu(0,t) = qu(1,t), qx^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)|_{x=0} = px^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)|_{x=1}, t \in [0,T], \quad (4)$$

где  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  – заданные функции, а  $p, q \in R$  – заданные числа, причем  $p^2 + q^2 \neq 0$  и выполняются условия склеивания  $p\varphi_1(0) = q\varphi_1(1), q[x^\alpha(1-x)^\beta \varphi_1'(x)]|_{x=0} = p[x^\alpha(1-x)^\beta \varphi_1'(x)]|_{x=1}, p\varphi_2(0) = q\varphi_2(1).$

При применении метода Фурье к поставленной задаче  $A_{pq}$  возникает следующая спектральная задача: найти те значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv -[x^\alpha(1-x)^\beta v'(x)]' = \lambda v(x), 0 < x < 1, \quad (5)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$v(x) \in C[0,1], \quad (6)$$

$$x^\alpha(1-x)^\beta v'(x) \in C[0,1], \quad (7)$$

$$pv(0) = qv(1), \quad (8)$$

$$q[x^\alpha(1-x)^\beta v'(x)]|_{x=0} = p[x^\alpha(1-x)^\beta v'(x)]|_{x=1}. \quad (9)$$

При  $p \neq q$ , доказано, что задача (6)-(9) имеет счетное число собственных значений  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots, \lambda_k \rightarrow +\infty$ , а соответствующие им собственные функции  $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_k(x) \dots$  образуют ортонормированную систему в пространстве  $L_2(0,1)$ .

Справедливы следующие теоремы:

**Теорема 1.** Пусть  $p \neq q$  и выполнены следующие условия:

а) функции  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  удовлетворяют условиям (6)-(9), а функции  $M\varphi_1(x)$ ,  $M\varphi_2(x)$  удовлетворяют условиям (6), (8) и

$$x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} [M\varphi_j(x)]' \in C(0,1) \cap L_2(0,1), j = \overline{1,2}, \quad (10)$$

б) функция  $f(x,t)$  удовлетворяет условиям (6)-(9), а функция  $Mf(x,t)$  удовлетворяет условиям (6), (8), (10) по аргументу  $x$  равномерно по  $t$ .

Тогда решение задачи  $A_{pq}$  существует, единственно и определяется формулой

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \varphi_{1k} \mathbb{E}_{\delta,1,(-1/2)} [-\lambda_k t^\delta; \gamma t] + \varphi_{2k} t \mathbb{E}_{\delta,2,1/2} [-\lambda_k t^\delta; \gamma t] \right\} v_k(x) + \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \int_0^t (t-z)^{\delta-1} \mathbb{E}_{\delta,\delta,(\delta-1)/2} [-\lambda(t-z)^\delta; \gamma(t-z)] f_k(z) dz \right] v_k(x),$$

где  $\lambda_k$  и  $v_k(x)$ ,  $k \in N$  - собственные значения и собственные функции задачи (4)-(9),  $\varphi_{1k}$ ,  $\varphi_{2k}$ ,  $f_k(t)$  - коэффициенты Фурье функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $f(x,t)$  по системе  $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ , а  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[x;y] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \bar{J}_{\alpha n/2 + \theta}(y)$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи  $A_{pq}$  справедлива следующая оценка:

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_7 \|\varphi_1'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + C_8 \|\varphi_2'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + C_9 \left\| \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \right\|_{L_{2,r}(\Omega)},$$

где  $\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\bar{\Omega}} |u(x,t)|$ ,  $\|f(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[ \int_0^1 r(x) [f(x)]^2 dx \right]^{1/2}$ ,  $r(x) = x^\alpha (1-x)^\beta$ .

### Список литературы

1. Уринов А., Усмонов Д. О задаче Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего интегро – дифференциальный

оператор с функцией Бесселя в ядре // *Бюллетень Института математики*. 2023, Т. 6. N 1. стр. 138-153.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. -Москва: Наука, 1965.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. 1966. Москва, Наука, 1966.

## **НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АДВЕКЦИИ-ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

*Хасанов Иброхим Ихтиерович*

*Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан*

[\*Ihasanov998@gmail.com\*](mailto:Ihasanov998@gmail.com)

Значительный интерес представляет разработка физически обоснованных математических моделей, учитывающих влияние фрактальной структуры почвы на их водный и солевой режимы. Влажность почвы является одним из наиболее быстро изменяющихся во времени  $t$  свойств почвы. На важность математического моделирования процессов поступления влаги и растворимых солей в почву, их перераспределение, расходование и совместное движение обратили внимание многие исследователи [1-3].

В настоящее время все больший интерес вызывает теория массопереноса во фрактальных средах, которая рассматривается в рамках физики открытых систем [4–6].

Рассмотрим Начально-краевая задачу для дробного дифференциального уравнения порядков  $0 < \beta, \alpha \leq 1$ :

$$u_t + D_{0+,t}^{1-\alpha} u - D_{0+,t}^{1-\beta} u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

где  $f(x, t)$  и  $\varphi(x)$  – заданные функции и  $(D_{0+,t}^\gamma g)(t)$  – дробная производная в смысле Римана-Лиувилля по переменной  $t$ , определяемая равенством ([6] стр. 69):

$$(D_{0+,t}^\gamma g)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau, \quad 0 < \gamma < 1,$$

$$D_{0+,t}^\gamma g(t) = g'(t), \quad \gamma = 1.$$

**Теорема 1.** Пусть  $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ,  $\varphi(x) \in C^3([0, l])$ ,  $\varphi'''(x) \in L_2([0, l])$  и  $f(x, t) \in C^{3,0}(\Omega)$ ,  $f_{xxx} \in L_2(\bar{\Omega})$ . Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в классе  $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap C_\gamma([0, T])$ , удовлетворяющее начальному условию (2) и граничным условиям (3), и оно имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \varphi_n I_n(t) + \int_0^t I_n(t-\tau) f_n(\tau) d\tau \right) X_n(x), \quad (4)$$

где

$$I_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} E_{\beta, \alpha k+1}^{k+1}(-\lambda_n t^\beta), \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (5)$$

$$\gamma = \max\{1 - \alpha, 1 - \beta\}.$$

### Список литературы

1. Беданоква С.Ю. Математическое моделирование водного и солевого режимов в почвах с фрактальной организацией: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Таганрог: Юж. фед. ун-т, 2007. — 16 с.

2. Мейланов Р. П., Шабанова М. Р. Уравнение теплопроводности для сред с фрактальной структурой. Современные наукоёмкие технологии, 2007. — № 8. — С. 84–85.

3. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. — М.: Наука, 2006. — 167 с.

4. *Р. И. Паровик.* Задача Коши для нелокального уравнения диффузии-адвекции радона во фрактальной среде. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1 (20), (2010), с. 127–132.

5. *Л И Сербина* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. Наука, (2007) 167 p.

6. *A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, (2006) 523 p

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ И С ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

*Хасанов Т.Г.,*

*Уральский государственный университет, Екатеринбург, Россия*

*temur.xasanov.2018@mail.ru*

В данной работе рассматривается система нелинейных нагруженных уравнений вида:

$$u_t + P(u(x_0, t))(u_{xxx} - 6uu_x) + Q(u(x_1, t))u_x = 2f(t) \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \eta, t) \varphi(x, -\eta, t) d\eta, \quad (1)$$

$$L(t)\varphi = \eta^2\varphi \quad (2)$$

где

$$u = u(x, t), \quad L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$$

и  $P(u(x_0, t))$  и  $Q(u(x_1, t))$  - некоторые многочлены от  $u(x_0, t)$  и  $u(x_1, t)$  соответственно, а  $x_0, x_1 \in R$ ,  $f(t)$ -заданная непрерывная функция. Система нелинейных уравнений (1)-(2) рассматривается при начальном условии.

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R \quad (3)$$

где начальная функция  $u_0(x)$  обладают следующим свойствами:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u_0(x)|dx < \infty; \quad (4)$$

2) оператор  $L(0) := -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x)$ ,  $x \in R$  имеет ровно  $N$  отрицательных собственных значений  $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$ .

В рассматриваемой задаче функция  $\varphi(x, \eta, t)$  - решение уравнения (2), определяемое асимптотикой

$$\varphi(x, \eta, t) = h(\eta, t)e^{-i\eta x}, \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где  $h(\eta, t)$  - изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta, t)h(-\eta, t)d\eta < \infty \quad (6)$$

при всех неотрицательных значения  $t$ .

Пусть функции  $u(x, t)$  и  $\varphi(x, \eta, t)$  обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при  $x \rightarrow \pm\infty$ , так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ (1+|x|)|u(x, t)| + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} \right| \right] dx < \infty, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( |\varphi(x, \eta, t)|^2 + |\varphi(x, -\eta, t)|^2 + \left| \frac{\partial \varphi(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right|^2 \right) d\eta < \infty. \quad (8)$$

Основная цель данной работы получить представления для решения  $u(x, t)$ ,  $\varphi(x, \eta, t)$  задачи (1)-(8) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора  $L(t)$ . Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 1:** Если функции  $u(x, t)$ ,  $\varphi(x, \eta, t)$ ,  $m = \overline{1, N}$ ,  $x \in R$ ,  $t > 0$  является решением задачи (1)-(8), то данные рассеяния  $\{r^+(k, t), \lambda_n(t), B_n(t), n = \overline{1, N}\}$

оператора  $L(t)$  с потенциалом  $u(x,t)$ , удовлетворить следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt} = \left( 8ik^3 P(u(x_0,t)) - 2ikQ(u(x_1,t)) - \right. \\ \left. - 2f(t)iV.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h(\eta)|^2}{\eta - k} d\eta - 2\pi|h(k)|^2 \right) r^+(k,t)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = \left( 8\chi_n^3 P(u(x_0,t)) + 2\chi_n Q(u(x_1,t)) - \frac{\chi_n f(t)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h(\eta)|^2}{\eta^2 + \chi_n^2} d\eta \right) B_n(t), \quad n = \overline{1, N}$$

**Замечание.** Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора  $L(t)$  и тем самым дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(8).

Пусть задана функция  $u_0(x)(1+|x|) \in L^1(R)$ . Тогда решение задачи (1)-(8) находится с помощью следующего алгоритма.

- Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией  $u_0(x)$  получаем данные рассеяния  $\{r^+(k), \chi_n, B_n, n = \overline{1, N}\}$  для оператора  $L(0)$ .
- Используя теорему 1, находим данные рассеяния для  $t > 0$

$$\{r^+(k,t), \chi_n(t), B_n(t), n = \overline{1, N}\}.$$

- Используя метод, опирающийся на интегральные уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим  $u(x,t)$  из данных рассеяния для  $t > 0$ , полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение  $\varphi(x,\eta,t)$  уравнения  $L(t)\varphi_m(x,\eta,t) := -\varphi_m''(x,\eta,t) + u(x,t)\varphi_m(x,\eta,t) = \lambda_m\varphi_m(x,\eta,t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ .

## Список Литературы

1. Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций. Записки научных семинаров ПОМИ. т. 506, стр. 258-278 (2021).

2. Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом и источником. *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2022, **25**:2, 127–142.

## ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ

*У.А. Хоитметов*

*Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан*

*x\_umid@mail.ru*

В данной работе изучается модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с дополнительным членом, а именно, рассматривается следующее уравнение

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \gamma(t)u_x = 0, \quad (1)$$

где  $\gamma(t)$  – заданная непрерывно дифференцируемая функция. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

где начальная функция  $u_0(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) обладает следующими свойствами:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty; \quad (3)$$

2) несамосопряженный оператор  $L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} - u_0(x) \\ -u_0(x) - \frac{d}{dx} \end{pmatrix}$  имеет ровно  $2N$

собственных значений  $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_{2N}(0)$  с кратностями  $m_1(0), m_2(0), \dots, m_{2N}(0)$ .

Пусть функция  $u(x, t)$  обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при  $x \rightarrow \pm\infty$  т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} \right| e^{2\varepsilon|x|} dx < \infty, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (4)$$

Основная цель данной работы – получить представления для решения  $u(x, t)$  задачи (1)-(4) в рамках метода обратной задачи рассеяния для

несамосопряженного оператора  $L(t) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} - u(x, t) \\ -u(x, t) - \frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ .

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

**Теорема.** Если функция  $u(x, t)$  является решением задачи (1)-(4), то данные рассеяния несамосопряженного оператора  $L(t)$  с потенциалом  $u(x, t)$  удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{dr^+}{dt} = (8i\xi^3 - 2i\xi\gamma(t))r^+, \quad (|\operatorname{Im} \xi| < \varepsilon); \quad m_k(t) = m_k(0), \quad \xi_k(t) = \xi_k(0), \quad k = \overline{1, N},$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t))\chi_0^n; \quad \frac{d\chi_1^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t))\chi_1^n + (24i\xi_n^2 - 2i\gamma(t))\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_2^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t))\chi_2^n + (24i\xi_n^2 - 2i\gamma(t))\chi_1^n + 24i\xi_n\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_3^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t))\chi_3^n + (24i\xi_n^2 - 2i\gamma(t))\chi_2^n + 24i\xi_n\chi_1^n + 8i\chi_0^n,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_l^n}{dt} = & (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t))\chi_l^n + (24i\xi_n^2 - 2i\xi_n\gamma(t))\chi_{l-1}^n + \\ & + 24i\xi_n\chi_{l-2}^n + 8i\chi_{l-3}^n, \quad n = \overline{1, N}, \quad l = 4, 5, \dots, m_n - 1. \end{aligned}$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(4).

**Пример.** Рассмотрим следующую задачу

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \gamma(t)u_x = 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = -\frac{2}{\operatorname{ch}2x}, \quad (6)$$

где  $\gamma(t) = -\frac{1+4\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{t^2+2}}$ .

Данные рассеяния оператора  $L(0)$  имеет вид:  $r^+(0) = 0$ ,  $\xi_1(0) = i$ ,  $\chi_0(0) = 2i$ .

В силу теоремы 1, имеем

$$\xi_1(t) = i; \quad r^+(t) = 0, \quad \chi_0(t) = 2ie^{8t+2\beta(t)},$$

где  $\beta(t) = \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$ . Следовательно,  $F(x, t) = 2e^{(-x+8t+2\beta(t))}$ . Решая интегральное

уравнение

$$K_1(x, y) - F(x+y) + \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x, z)F(z+s)F(s+y)dsdz = 0,$$

получим  $K_1(x, y) = \frac{2\exp\{-x-y+8t+2\beta(t)\}}{1+\exp\{-4x+16t+4\beta(t)\}}$ . Откуда находим решение задачи

Коши (5)-(6)

$$u(x, t) = -\frac{2}{\operatorname{ch}2\left(x + \operatorname{arcsch}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}.$$

## Список использованной литературы

1. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988, 694 с.
2. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // ДАН СССР, 1972, Т. 207, № 1, С.44–47.
3. Хасанов А.Б. Об обратной задаче теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка // ДАН СССР, 1984, Т. 277, № 3, С.559–562.
4. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // J.Phys. Soc. Japan. 1972, vol.32, P.1681.
5. Khasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions // Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics, (2021), 38, pp. 19–35.

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МКДФ-СИНУС-ГОРДОНА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

*У.А. Хоитметов*

*Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан*

*x\_umid@mail.ru*

В данной работе мы рассмотрим следующую систему уравнений

$$u_{xt} + p(t) \left( \frac{3}{2} u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx} \right) = q(t) \sin u + \omega(t) u_{xx} + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^j \left( f_{k1}^j f_{k1}^{m_k-1-j} - f_{k2}^j f_{k2}^{m_k-1-j} \right), \quad (1)$$

$$L(t) f_k^j = \xi_k f_k^j + l f_k^{l-1}, \quad \text{Im} \xi_k > 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad l = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad (2)$$

где  $C_n^l = \frac{n!}{(n-l)!l!}$ ,  $L(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3$ ,  $u_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ ,  $u_{xt} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$ ,

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u_{xxxx} = \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}, \quad \text{а } p(t), q(t), \omega(t) \text{ — изначально заданные}$$

непрерывно дифференцируемые функции. Здесь и далее

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (1)-(2) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где начальная функция  $u_0(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) обладает следующими свойствами:

$$u_0(x) \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty; \quad (4)$$

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|)|u_0'(x)| + |u_0''(x)| + |u_0'''(x)| + |u_0''''(x)|) dx < \infty.$$

$$2) \text{ Оператор } L(0) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x(x,0)}{2} \sigma_2 + \frac{u_x(x,0)}{2} \sigma_3, \text{ не имеет спектральных}$$

особенностей и имеет ровно  $N$  собственных значений  $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)$  с кратностями  $m_1(0), m_2(0), \dots, m_N(0)$  в верхней полуплоскости комплексной плоскости.

Предполагается, что вектор-функции  $f_k^j = (f_{k1}^j(x,t), f_{k2}^j(x,t))^T$

нормированы условиями

$$\frac{1}{(m_k - 1 - s)!} \int_{-\infty}^{\infty} (f_{k1}^{m_k-1} f_{k2}^{m_k-1-s} + f_{k2}^{m_k-1} f_{k1}^{m_k-1-s}) dx = A_{m_k-1-s}^k(t), \quad (5)$$

где  $A_{m_k-1-s}^k(t)$  – значально заданные непрерывные функции от  $t$  ( $t \geq 0$ ),  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $s = 0, 1, \dots, m_k - 1$ .

Пусть функция  $u(x,t)$  имеет достаточную гладкость и достаточно быстро стремится к своим пределам при  $x \rightarrow \pm\infty$ , т.е.

$$u(x,t) \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ при } |x| \rightarrow \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left( (1+|x|)|u_x(x,t)| + \sum_{j=2}^4 \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| \right) dx < \infty. \quad (6)$$

Основная цель настоящей работы – получить представление решения  $u(x,t)$ ,  $f_k^j(x,t)$ ,  $k = \overline{1, N}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m_k - 1$  задачи (1)-(6) в рамках метода

обратной задачи для оператора  $L(t)$ . Обратная задача для оператора  $L(t)$  на всем ось изучалась в работах [2, 3].

**Теорема 1.** Если функции  $u(x,t)$ ,  $f_k^j(x,t)$ ,  $k=1,2,\dots,N$ ,  $j=0,1,\dots,m_k-1$  являются решением задачи (1)-(6), то данные рассеяния оператора  $L(t)$  меняются по  $t$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= \left( 8i\xi^3 p(t) - \frac{iq(t)}{2\xi} + 2i\xi\omega(t) \right) r^+, \quad (\text{Im}\xi = 0), \quad m_n(t) = m_n(0), \quad \frac{d\xi_n}{dt} = 0, \\ \frac{d\chi_0^n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) - \frac{iq(t)}{2\xi_n} + 2i\xi_n\omega(t) - \frac{1}{2}A_0^n(t) \right) \chi_0^n, \\ \frac{d\chi_1^n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) - \frac{iq(t)}{2\xi_n} + 2i\xi_n\omega(t) - \frac{1}{2}A_0^n(t) \right) \chi_1^n + \left( 24i\xi_n^2 p(t) + \frac{iq(t)}{2\xi_n^2} + 2i\omega(t) - \frac{1}{2}A_1^n(t) \right) \chi_0^n, \\ \frac{d\chi_2^n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) - \frac{iq(t)}{2\xi_n} + 2i\xi_n\omega(t) - \frac{1}{2}A_0^n(t) \right) \chi_2^n + \\ &+ \left( 24i\xi_n^2 p(t) + \frac{iq(t)}{2\xi_n^2} + 2i\omega(t) - \frac{1}{2}A_1^n(t) \right) \chi_1^n + \left( 24i\xi_n p(t) - \frac{iq(t)}{2\xi_n^3} - \frac{1}{2}A_2^n(t) \right) \chi_0^n, \\ \frac{d\chi_3^n}{dt} &= \left( 8i\xi_n^3 p(t) - \frac{iq(t)}{2\xi_n} + 2i\xi_n\omega(t) - \frac{1}{2}A_0^n(t) \right) \chi_3^n + \left( 24i\xi_n^2 p(t) + \frac{iq(t)}{2\xi_n^2} + 2i\omega(t) - \frac{1}{2}A_1^n(t) \right) \chi_2^n + \\ &+ \left( 24i\xi_n p(t) - \frac{iq(t)}{2\xi_n^3} - \frac{1}{2}A_2^n(t) \right) \chi_1^n + \left( 8ip(t) + \frac{iq(t)}{2\xi_n^4} - \frac{1}{2}A_3^n(t) \right) \chi_0^n, \\ \frac{d\chi_{m_n-1-\nu}^n}{dt} &= (8i\xi_n^3 p(t) + 2i\xi_n\omega(t)) \chi_{m_n-1-\nu}^n + (24i\xi_n^2 p(t) + 2i\omega(t)) \chi_{m_n-2-\nu}^n + \\ &+ 24i\xi_n p(t) \chi_{m_n-3-\nu}^n + (24i\xi_n^2 p(t) + 2i\omega(t)) \chi_{m_n-2-\nu}^n + 24i\xi_n p(t) \chi_{m_n-3-\nu}^n + 8ip(t) \chi_{m_n-4-\nu}^n \\ &- \sum_{s=\nu}^{m_n-1} \left( \frac{(-1)^{m_n-1-s} iq(t)}{2\xi_n^{m_n-s}} + \frac{1}{2}A_{m_n-1-s}^n(t) \right) \chi_{s-\nu}^n, \quad n = \overline{1, N}, \quad \nu = m_n - 1, m_n - 2, \dots, 0. \end{aligned}$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(6).

### Список использованной литературы

1. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988, 694 с.
2. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // ДАН СССР, 1972, Т. 207, № 1, С.44–47.
3. Хасанов А.Б. Об обратной задаче теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка // ДАН СССР, 1984, Т. 277, № 3, С.559–562.
4. Wazwaz A.M. N-soliton solutions for the integrable modified KdV–sine-Gordon equation, Phys. Scr., **89** (2014), 065805.
5. Hoitmetov U.A. On the Cauchy problem for the mKdV–sine-Gordon equation with an additional term // Acta Applicandae Mathematicae, 2023, 184, 7. doi:10.1007/s10440-023-00561-x.

## ПЕРИДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ГИПЕРЭЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Юлдашева А.В.*

*филиал Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова  
в городе Ташкент, Ташкент, Узбекистан*

*a\_v\_yuldasheva@mail.ru*

Перидинамическая модель в среде с нелинейными и нелокальными свойствами упругости приводит к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int_{\Omega} F(u(x,t) - u(y,t), x - y) dy = f(x,t), x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in \Omega, \quad (2)$$

где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – область с кусочно-гладкой границей.

Здесь предполагается, что неизвестная функция  $u: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ядро  $F: (\Omega \times [0, T]) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  и внешняя сила  $f: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  являются векторными функциями.

Мы предполагаем, что вектор-функция  $F$  для изотропных микроупругих перидинамических материалов [1], имеет вид:

$$F(u, x) = \frac{|u+x|^{p-2}}{|x|^{n+\alpha p}} (u + x), \quad (3)$$

где  $0 < \alpha < 1, p \geq 2$  – некоторые постоянные.

Положим

$$B[u](x) = \int_{\Omega} F(u(x, t) - u(y, t), x - y) dy. \quad (4)$$

Проинтегрируем уравнение (1) дважды по  $t$ , получим

$$u(x, t) = \int_0^t (t - s) B[u(x, s)] ds + \Phi(x, t), \quad (5)$$

где

$$\Phi(x, t) = \varphi(x) + t\psi(x) + \int_0^t (t - s) f(x, s) ds. \quad (6)$$

Введем оператор

$$A[u](x, t) = \int_0^t (t - s) B[u(x, s)] ds + \Phi(x, t) \quad (7)$$

В разрешимости задачи (1) - (2) важную роль играют операторы  $A$  и  $B$ , поэтому далее исследуем их свойства.

**Лемма 1.** Верно неравенство

$$\| B[u] - B[v] \|_{L_p} \leq C \| u - v \|_{L_{p(p-1)}}.$$

**Лемма 2.** Для любого  $m \in \mathbb{N}$  существует  $T > 0$  такое, что  $A^m: C([0, T] \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)) \rightarrow C([0, T] \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n))$  является сжимающим отображением.

Согласно (5), (7) задача (1)-(2) эквивалентна уравнению  $u = A[u]$ .

**Теорема 1.** Пусть заданны функции  $\varphi(x), \psi(x) \in L_2(\Omega)$ ,  $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ . Тогда существует некоторое  $T > 0$  такое, что задача (1)-(2) разрешима единственным образом в классе  $C^2([0, T] \rightarrow L_2(\Omega))$ .

Основные результаты доказываются методами, разработанными в [2].

*Литература*

1. Silling, S.A.: Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *J. Mech. Phys. Solids* 48(1), 175–209 (2000).
2. Юлдашева А.В. Локальная разрешимость нелинейного уравнения перидинамики. *ДАН РУз*, №2, С. 7-11 (2022).

**III SHO‘BA: ALGEBRA VA GEOMETRIYA**  
**СЕКЦИЯ № 3: АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ**  
**SECTION No. 3: ALGEBRA AND GEOMETRY**

**SIMPLEKTIK KO‘PXILLIKLAR GEOMETRIYASI**

*Abdusalomova N.M*

*Namangan muhandislik-texnologiya instituti, Namangan, O‘zbekiston*

[\*nmannobova@mail.ru\*](mailto:nmannobova@mail.ru)

*Differensial formalar yordamida hosil qilingan simplektik ko‘pxilliklar:*

Bizga  $M^{2n}$  – juft o‘lchamli silliq ko‘pxillik va unda aniqlangan  $\omega = \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) 2-darajali differensial forma berilgan bo‘lsin.

**Ta’rif-1.**  $M^{2n}$  – silliq ko‘pxillik va  $\omega$  2-darajali forma birgalikda *simplektik ko‘pxillik* deyiladi, agar 2-darajali forma quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

a)  $\omega$  forma xosmas bo‘lsa, ya’niko‘pxillikning ixtiyoriy nuqtasida  $(\omega_{ij}(x))$  – matrisa xosmas matrisa bo‘lsa.

Ma’lumki,  $\omega = \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j$  forma koeffisientlari  $(\omega_{ij})$  – kososimmetrik matrisani hosil qiladi.

b)  $\omega$  forma yopiq bo‘lsa, ya’ni  $d\omega = 0$ .

Simplektik ko‘pxilliklar quyidagicha  $(M^{2n}, \omega)$  belgilanadi[1-4].

**Misol-1.**  $R^{2n}$  – Yevklid fazosi va xosmas, yopiq 2-darajali forma  $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$  bilan birgalikda simplektik ko‘pxillik bo‘ladi. Bu yerda

$(p, q) \in R^{2n}$ ,  $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ .

*Puasson strukturasi yordamida hosil qilingan simplektik ko‘pxilliklar:*

$M$  sohada  $H$  – haqiqiy qiymatli funksiya berilgan va  $x$  nuqtani lokal koordinatalari  $x = (x_1, \dots, x_m)$  bo‘lsin. U holda vektor maydoni quyidagicha yozish mumkin:

$$V_H = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Bu vektor maydonni ixtiyoriy  $F$  – silliq funksiyaga ta'sirini esa quyidagicha yozish mumkin.

$$V_H(F) = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \frac{\partial F}{\partial x_i} = \{F, H\} \quad (3)$$

Bundan

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \{x_i, x_j\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (4)$$

(4) tenglikdan  $\{x_i, x_j\} = J_{ij}(x)$  – matrisa hosil bo'ladi. Bu matrisa ko'rib turganimizdek bazislardan qurilgan  $m \times m$  o'lchamli kososimmetrik matrisa bo'ladi. Bu puasson ko'pxilligining *strukturali matrisasi* deyiladi. Strukturali matrisa bir qiymatli Puasson strukturasini aniqlaydi.

(4) tenglikni  $F$  va  $H$  funksiyalar gradienti orqali tasvirlasak,  $\{F, H\} = \nabla F \cdot J \nabla H$  tenglik hosil bo'ladi. Shuningdek, (4) tenglikdan foydalanib  $H$  – funksiyaga mos keluvchi Gamilton vektor maydonning ko'rinishini quyidagicha yozish mumkin:

$$\hat{V}_H = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \{x_i, x_j\} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

yoki matrisali ko'rinishi

$$V_H = (J \nabla H) \cdot \partial_x . \quad (5)$$

Bu yerda  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x_i}$  .

(5) tenglikka ko'ra gamilton sistemasining umumiy ko'rinishi

$$\frac{dx}{dt} = J(x) \nabla H(x) \quad (6)$$

bo'ladi.

Bu yerda  $H(x)$ -gamiltonian,  $J(x)$ -Puasson strukturasi hosil qilgan matrisa,  $\nabla H - H$  funksiyaning gradiyenti.

(6) sistemaning qavsli ko`rinishini quyidagicha  $\frac{dx}{dt} = \{x, H\}$  yozish mumkin.

Yuqoridagi tushunchalardan quyidagi natija kelib chiqadi.

**Natija-1.** Bizga  $M$  – puasson ko`pxilligi berilgan va  $x \in M$  bo`lsa, u holda

$$B(x): T_x^*M \rightarrow T_xM \quad (9)$$

yagona chiziqli akslantirish mavjud bo`lib, ixtiyoriy  $H$  – haqiqiy qiymatli silliq funksiya uchun quyidagi tenglik bajariladi:  $B(dH(x)) = \hat{V}_H|_x$

Bu yerda  $dH - H$  funksiyaning differensial (ma'lumki bu differensial 1-darajali formani hosil qiladi).

Bizga  $M$  – puasson ko`pxilligi berilgan va  $x \in M$  bo`lsin.

**Ta'rif-2.**  $M$  – ko`pxillikning  $x$  nuqtadagi rangi deb  $B(x): T_x^*M \rightarrow T_xM$  chiziqli akslantirishning shu nuqtadagi rangiga aytiladi.

**Lemma-1.**  $M$  – ko`pxillikning  $x$  nuqtadagi rangi uning strukturali matrisasining shu nuqtadagi rangiga teng bo`ladi.

**Lemma-2.** Puasson ko`pxilligi rangi maksimal rangli bo`lsa, u holda u juft o`lchamli bo`ladi, ya'ni  $m = 2n$ .

**Ta'rif-3.**  $m$  o`lchamli  $M$  – Puasson ko`pxilligi simplektik deyiladi, agar Puasson strukturasi rangi maksimal ( $m$  ga teng) bo`lsa[5].

**Teorema.** Puasson strukturasi yordamida hosil qilingan simplektik ko`pxillik differensial 2-forma yordamida hosil qilingan simplektik ko`pxillikka ekvivalentdir.

### Adabiyotlar:

1. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1989г.

2. Фоменко А.Т, Симплетическая геометрия. Методы и приложения. Издательство московского университета. 1988г.
3. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М-Л, Главная редакция технико-теоретической литературы. 1937г.
4. В.И. Арнолд, А.Б. Гивентал, Симплетическая геометрия. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000г.

## **LOCAL AUTOMORPHISMS OF JORDAN ALGEBRAS OF LOW DIMENSION**

*F.N.Arzikulov and F.B.Nabijonova*

*Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, 4, Universitety street,  
Olmazor, Tashkent, 100174, Uzbekistan. Departament of Mathematics, Fergana  
State University, 19, Murabbiylar Street, Fergana, 150100, Uzbekistan*

*Email address: [arcikulovfn@rambler.ru](mailto:arcikulovfn@rambler.ru) and [Nabijonovaferuza@mail.ru](mailto:Nabijonovaferuza@mail.ru)*

Present work is devoted to the study of local automorphisms of Jordan algebras. In 1990, Kadison [2] and Larson and Sourour [3] independently introduced the concept of a local derivation.

In [2] R.Kadison proves that each continuous local derivation from a von Neumann algebra into its dual Banach bimodule is a derivation. B.Jonson [1] extends the above result by proving that every local derivations from a  $C^*$ -algebra into its Banach bimodule is a derivation. In particular, Johnson gives an automatic continuity result by proving that local derivations of a  $C^*$ -algebra  $A$  into a Banach  $A$ -bimodule  $X$  are continuous even if not assumed a priori to be so (cf.[1, Theorem 7.5]). Based on these results, many authors have studied local derivations on operator algebras.

The first results concerning local derivations and automorphisms on finite-dimensional Lie algebras were obtained by Sh.Ayupov and K.Kudaybergenov. They proved that every local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with

local derivations which are not derivations. Sh.A.Ayupov, K.K.Kudayberganov, B.A.Omirov proved similar results concerning local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras.

F.N.Arzikulov, I.A.Karimjanov and S.M.Umrzaqov established that every local and 2-local automorphisms on the solvable Leibniz algebras with null-filiform and naturally graded non-Lie filiform nilradicals, whose dimension of complementary space is maximal, is an automorphism.

Later, I.A.Karimjanov, S.M.Umrzaqov and B.Yusupov describe automorphisms, local and 2-local automorphisms of solvable Leibniz algebras with a model or abelian null-radicals. They show that any local automorphism on solvable Leibniz algebras with a model nilradical, the dimension of the complementary space of which is maximal, is an automorphism. But solvable Leibniz algebras with an abelian nilradical with a 1-dimensional complementary space admit local automorphisms which are not automorphisms.

In the present paper automorphisms, local automorphisms of Jordan algebras of dimension 2 and 3 are studied. Namely, a common form of the matrix of automorphisms and local automorphisms of these algebras is clarified. It turns out that the common form of the matrix of an automorphism on some Jordan algebras of dimension 3 does not coincide with the local automorphism's matrix's common form on these Jordan algebras. Therefore, there exists a Jordan algebra of dimension 3 no each local automorphism of which is an automorphism.

Let  $J$  be a Jordan algebra of dimension  $n$  with a basis  $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ . Let  $x$  be an element in  $J$ . Then we can write

$$x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_n f_n$$

for some elements  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in  $\mathbf{F}$ . Throughout of the paper let  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

Let  $T: J \rightarrow J$  be a linear operator. Then

$$T(x) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n b_{i,j} x_j \right) f_i, x \in J$$

for the matrix  $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$  of the linear operator  $T$ , where  $x = x_1f_1 + x_2f_2 + \dots + x_nf_n$ .

In the following tables a necessary and sufficient condition for a linear operator to be an automorphism on a number of Jordan algebras of low dimension is listed. Also, it is indicated that, whether each local automorphism of these Jordan algebras is an automorphism or not. Examples of local automorphisms, which are not an automorphism, are also provided in these tables.

The third column of the tables indicates whether each local automorphism of the corresponding Jordan algebra is an automorphism or not, i.e., if yes, then sign “+” is put in the appropriate place of the column, if not, then a counterexample is given. All notations of tables 1 and 2 are taken from [4].

Table 1

Local automorphisms of two-dimensional Jordan algebras.

$J$	Multiplication table	Common form of automorphism	Is each local automorphism
$B_1$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1$	$x_1e_1 + x_2\alpha n_1$	+
$B_2$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1$	$x_1e_1 + x_2\alpha n_1$	+
$B_3$	$n_1^2 = n_2$	$x_1\alpha e_1 + x_1\alpha^2 n_1 + x_1\beta n_1$	+

Table 2

Local automorphisms of two-dimensional Jordan algebras.

$J$	Multiplication table	Common form of automorphism	Is each local automorphism
$\tau_1$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1^2 = n_2$ $e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2$	$x_1e_1 + (x_1\alpha + x_2\beta)n_1$ $+(x_1\alpha^2 + x_2\gamma + x_3\beta^2)m_2$	$x_1e_1 + x_2n_1 + 4x_3n_2$
$\tau_2$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2$	$x_1e_1 + x_2\alpha n_1$ $+x_3\beta n_2$	+

$\tau_3$	$n_1^2 = n_2, n_1 n_2 = n_3$	$x_1 \alpha e_1 + (x_1 \beta + x_2 \alpha^2) n_1$ $+ (x_1 \gamma + 2x_2 \alpha \beta + x_2 \alpha^3) n_2$	$x_1 e_1 + (4x_2 + 8x_3) n_2$
----------	------------------------------	--	-------------------------------

Now we give a description of local automorphisms of the Jordan algebras from the Tables 1 and 2.

**Definition.** Let  $A$  be an algebra. A linear map  $\Phi: A \rightarrow A$  is called a local automorphisms, if for any element  $x \in A$  there exists an automorphism  $\varphi_x: A \rightarrow A$  such that  $\Phi(x) = \varphi_x(x)$ .

**Theorem 0.1.** Each local automorphism if the algebras  $B_1, B_2, B_3$  and  $\tau_3$  is an automorphism.  $\tau_1$  if and only if the map  $\varphi$  has the following form:

$$\varphi(e_1) = e_1 + \alpha n_1 + \alpha^2 n_2,$$

$$\varphi(n_1) = \beta n_1 + \gamma n_2, \varphi(n_1) v^2 n_2.$$

We can similarly prove the following theorems using Tables 1 and 2.

**Theorem 0.3.** A linear map  $\varphi$  is a local automorphism of the algebra  $\tau_3$  if and only if the map  $\varphi$  has the following form:

$$\varphi(e_1) = \alpha e_1 + \beta n_1 + \gamma n_2,$$

$$\varphi(n_1) = v^2 n_1 + 2v \mu n_2, \varphi(n_1) = \lambda^3 n_2.$$

Note that the common form of the matrix of a local automorphism on an algebra includes the common form of the matrix of an automorphism on this algebra. The coincidence of these common forms denotes that every local automorphism of the considering algebra is an automorphism. But the common form of the matrix of an automorphism on the Jordan algebras  $\tau_1$  and  $\tau_1$  does not coincide with the common form of the matrix of a local automorphism on these algebras by the appropriate Table 2 and theorems 0.2, 0.3. Therefore, the Jordan algebras  $\tau_1$  and  $\tau_1$  have local automorphisms that are not automorphisms.

#### REFERENCES:

- [1] B.Johnson, Local derivations on  $C^*$ - algebras are derivations, Trans. Amer. Math. Soc., 353 (2001), 313-325. DOI: 10.2307/221975
- [2] R.Kadison. Local derivations, J.Algebra, 130(1990), 494-509. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(90\)90095-6](https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90095-6).
- [3] D.R.Larson, A.R.Sourour, Local derivations and local automorphisms of  $B(X)$ , Operator theory: operator algebras and applications, part 2 (Durham, NH, 1988), 187-194, Proc. Sympos. Pure Math. 51, Part 2, Amer.Math.Soc., Providence, RI, (1990).
- [4] I.Kashuba, M.E.Martin, Deformations of Jordan algebras of dimension four, Journal of Algebra 399, 288-289 (2014).

## **ON LOCAL INNER DERIVATIONS OF FOUR-DIMENSIONAL JORDAN ALGEBRAS**

*F. N. Arzikulov*<sup>1,2</sup>, *F. S. Urinboyev*<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of  
Sciences, Tashkent, Uzbekistan,*

<sup>2</sup>*Andizhan State University, Andizhan, Uzbekistan [arzikulovfn@gmail.com](mailto:arzikulovfn@gmail.com)*

<sup>3</sup>*Namangan State University, Uychi street 316, Namangan, Uzbekistan  
[furqatjonforever@gmail.com](mailto:furqatjonforever@gmail.com)*

Jordan algebras are classical algebras widely studied by specialists. Jordan algebras turned out to be related to other classical algebras such as associative algebras and Lie algebras. The classification of finite-dimensional Jordan algebras is one of the primary areas of modern algebra and, as is known, was first studied by P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner [3]. Classifications of 3- and 4-dimensional Jordan algebras were constructed by I. Kashuba and M.E. Martin in [5], M.E. Martin in [9], I. Kashuba and I. Shestakov in [6], respectively. Moreover, the case of nilpotent Jordan algebras of dimension 5 was classified by Hegazy and Abdlwahab [1]. Most classification problems for finite-dimensional Jordan algebras have been studied in order to establish certain properties of Jordan algebras, while the complete classification of Jordan algebras in general is still an

open problem. There are many theoretical works on derivation and inner derivation of associative and Lie algebras. However, in the case of Jordan algebras, there are few of them. For this reason, our interest in this article lies in the study and description of inner derivations of four-dimensional Jordan algebras.

In this paper, we study local derivations of four-dimensional Jordan algebras. The concept of local derivations was introduced by R. Kadison [4] and D. Larson, A. Sourour [8] independently in 1990. A linear mapping  $\nabla$  of an algebra  $A$  into itself is a local derivation if for each  $a$  in  $A$  there exists a derivation  $D_a$  on  $A$  such that  $D_a(a) = \nabla(a)$ .

R. Kadison proves that every continuous local derivation of a von Neumann algebra into its dual Banach bimodule is a derivation. B. Johnson [2] generalizes the above result by proving that each a local derivation of a  $C^*$ -algebra into its Banach bimodule is a derivation. Based on these results, many authors have studied local derivations on operator algebras.

**Definition.** A Jordan algebra  $\mathcal{J}$  is a vector space over a field  $F$  equipped with a bilinear operator  $\cdot: \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ , satisfying the following identities:

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad (x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x)$$

for any  $x, y \in \mathcal{J}$ .

An important special case of mapping derivation is the so-called “inner derivation”. In this section, we introduce the notion of inner derivations of Jordan algebras and give their properties.

Let  $\mathcal{J}$  be a Jordan algebra. Recall that a linear map  $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  is called a derivation if  $D(xy) = D(x)y + xD(y)$  for any two elements  $x, y \in \mathcal{J}$ .

Given subsets  $B$  and  $C$  of the Lie algebra with bracket  $[\cdot, \cdot]$ , denote by  $[B, C]$  the set of all finite sums of elements  $[b, c]$ , where  $b \in B$  and  $c \in C$ .

Consider the Jordan algebra  $\mathcal{J}$  and let  $m = \{xM: x \in \mathcal{J}\}$ , where  $xM$  denotes the multiplication operator defined by  $(xM)y := x \cdot y$  for all  $x, y \in \mathcal{J}$ . Let  $aut(\mathcal{J})$  denote the Lie ring of all derivations of  $\mathfrak{R}$ . The elements of the ideal  $int(\mathcal{J}) := [m, m]$  of the algebra  $aut(\mathfrak{R})$  are called inner derivations of  $\mathcal{J}$ . In other words,

derivation of  $D$  by  $\mathcal{J}$  is called inner derivation if there exist elements  $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$  into  $\mathcal{J}$  such that  $D(x) = \sum_{k=1}^m [a_k(b_k x) - b_k(a_k x)], x \in \mathcal{J}$ .

A linear mapping  $\nabla: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  is called a inner local derivation if for every  $x \in \mathcal{J}$  there exists a derivation  $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  such that  $\nabla(x) = D(x)$ .

Let  $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  be a linear operator. Then  $D(x) = \widehat{A}x, x \in \mathcal{J}$ , for the matrix  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^4$  of the linear operator  $D$ , where  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ . For example, if  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_2$  (see table 2) and  $D$  is a inner derivation on  $\mathcal{J}$ , then  $D$  has the following form  $D(x) = (-\beta x_3 - \alpha x_4)e_1 + (-\beta x_3 - \alpha x_4)e_2 + (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \gamma x_3)e_3 + (\beta x_1 + \beta x_2 - \gamma x_4)e_4$  with respect to the basis  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , for some  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $\mathbb{F}$ . This form of a inner derivation can be directly calculated, and we will omit the calculations of the forms of inner derivations on the Jordan algebras. Throughout this paper, let  $E_{i,j}$  be a linear mapping of the algebra  $\mathcal{J}$  with basis  $\{e_1, \dots, e_4\}$ , which maps the basis element  $e_j$  to  $e_i$  and the rest basis elements to zero. Then, for example, the vector space of inner derivations of the algebra  $\mathcal{J}_2$  admits a basis of the following form:  $\{E_{3,1} + E_{3,2} - E_{1,4} - E_{2,4}, E_{4,1} + E_{4,2} - E_{1,3} - E_{2,3}, E_{3,3} - E_{4,4}\}$ .

**Theorem 1.** [7] *Let  $A$  be a four-dimensional Jordan algebra. Then it is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic Jordan algebras:*

**Table 1**

**Four-dimensional Jordan algebras.**

$\mathcal{J}$	Multiplication table	$\mathcal{J}$	Multiplication table
$\mathcal{J}_2$	$e_1 e_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2), e_1 e_3 = \frac{1}{2}e_3, e_1 e_4 = \frac{1}{2}e_4, e_2 e_3 = \frac{1}{2}e_3, e_2 e_4 = \frac{1}{2}e_4$	$\mathcal{J}_{52}$	$e_1 n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1 n_2 = n_2, n_1^2 = n_3$
$\mathcal{J}_9$	$e_3^2 = e_1 + e_2, e_1 e_3 = \frac{1}{2}e_3, e_2 e_3 = \frac{1}{2}e_3, e_1 n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_2 n_1 = \frac{1}{2}n_1$	$\mathcal{J}_{53}$	$e_1 n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1 n_2 = n_2, n_1^2 = n_2 + n_3$
$\mathcal{J}_{16}$	$e_1 n_2 = \frac{1}{2}n_2, e_1 n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_2 n_1 = \frac{1}{2}n_1$	$\mathcal{J}_{55}$	$e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = n_2,$

			$e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_3^2 = n_2$
$J_{17}$	$e_1 n_2 = n_2, e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, e_2 n_1 = \frac{1}{2} n_1$	$J_{56}$	$e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = n_2,$ $e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_1^2 = n_2$
$J_{18}$	$e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, e_2 n_1 =$ $\frac{1}{2} n_1, e_2 n_2 = \frac{1}{2} n_2$	$J_{57}$	$e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = n_2,$ $e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_1^2 = n_2, n_3^2 =$ $n_2$
$J_{25}$	$n_1^2 = n_2, e_1 n_2 = n_2, e_1 n_1 =$ $\frac{1}{2} n_1, e_2 n_1 = \frac{1}{2} n_1$	$J_{58}$	$e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2,$ $e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_3^2 = n_1$
$J_{31}$	$e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = n_2$	$J_{59}$	$e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2,$ $e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_3^2 = n_1, n_2 n_3 =$ $n_1$
$J_{32}$	$e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, e_1 n_3 = n_3$	$J_{60}$	$e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2,$ $e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_1 n_2 = n_3$
$J_{33}$	$e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3$	$J_{61}$	$n_1^2 = n_2, n_2^2 = n_4, n_1 n_3 =$ $n_4, n_1 n_2 = n_3$
$J_{36}$	$e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = n_2, e_1 n_3 = n_3$	$J_{62}$	$n_1^2 = n_2, n_4^2 = n_2, n_1 n_2 =$ $n_3$
$J_{39}$	$n_1^2 = n_2, n_1 n_2 = n_3, e_1 n_1 =$ $n_1, e_1 n_2 = n_2, e_1 n_3 = n_3$	$J_{63}$	$n_1^2 = n_2, n_4^2 = -n_2 - n_3,$ $n_1 n_2 = n_3, n_2 n_4 = n_3$
$J_{42}$	$n_1^2 = n_2, e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 =$ $n_2, e_1 n_3 = n_3$	$J_{64}$	$n_1^2 = n_2, n_4^2 = -n_2,$ $n_1 n_2 = n_3, n_2 n_4 = n_3$
$J_{43}$	$n_1^2 = n_2, n_1 n_3 = n_2, e_1 n_1 =$ $n_1, e_1 n_2 = n_2, e_1 n_3 = n_3$	$J_{65}$	$n_1^2 = n_2, n_1 n_2 = n_3, n_2 n_4 =$ $n_3$
$J_{45}$	$e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, n_1^2 = n_2, n_3^2 = n_2$	$J_{66}$	$n_1^2 = n_2, n_4^2 = n_3, n_1 n_2 =$ $n_3$

$\mathcal{J}_{48}$	$e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, n_3^2 = n_1$	$\mathcal{J}_{69}$	$n_1^2 = n_2, n_1 n_3 = n_4$
$\mathcal{J}_{49}$	$e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_3^2 = n_1, n_2 n_3 = n_1$	$\mathcal{J}_{70}$	$n_1^2 = n_2, n_3 n_4 = n_2$
$\mathcal{J}_{50}$	$n_1 n_2 = n_3, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3$		

Further we apply our algorithm to describe inner derivations of four-dimensional Jordan algebras. Let  $\mathcal{J}$  be a four-dimensional Jordan algebra. Then the following theorem takes place.

**Theorem 2.** *Inner derivations and local inner derivations of four-dimensional Jordan algebras are given as follows:*

**Table 2**  
**Inner derivations and local inner derivations on**  
**four-dimensional Jordan algebras.**

$\mathcal{J}$	Common form of a inner derivation	Common form of a local inner derivation	Is each inner local derivation a inner derivation?
$\mathcal{J}_2$	$\{E_{3,1} + E_{3,2} - E_{1,4} - E_{2,4}, E_{4,1} + E_{4,2} - E_{1,3} - E_{2,3}, E_{3,3} - E_{4,4}\}$	$\{E_{3,1} + E_{3,2} - E_{1,4} - E_{2,4}, E_{4,1} + E_{4,2} - E_{1,3} - E_{2,3}, E_{3,3} - E_{4,4}\}$	+
$\mathcal{J}_9$	$\{E_{3,1} + E_{3,2} - 2E_{1,3} - 2E_{2,3}, E_{4,1} + E_{4,2}, E_{4,3}\}$	$\{E_{3,1} + E_{3,2} - 2E_{1,3} - 2E_{2,3}, E_{4,1} + E_{4,2}, E_{4,3}\}$	+
$\mathcal{J}_{16}$	$\{E_{3,1} + E_{3,2}, E_{4,1}\}$	$\{E_{3,1} + E_{3,2}, E_{4,1}\}$	+
$\mathcal{J}_{17}$	$\{E_{3,1} + E_{3,2}, E_{4,1}\}$	$\{E_{3,1} + E_{3,2}, E_{4,1}\}$	+
$\mathcal{J}_{18}$	$\{E_{3,1} + E_{3,2}, E_{4,1} + E_{4,2}\}$	$\{E_{3,1} + E_{3,2}, E_{4,1} + E_{4,2}\}$	+
$\mathcal{J}_{25}$	$\{E_{3,1} + E_{3,2} + 2E_{4,3}, \{E_{3,1} + E_{3,2} - 2E_{4,3}, E_{4,1}\}\}$	$\{E_{3,1}, E_{3,2}, E_{4,1}, E_{4,3}\}$	-

$J_{31}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	+
$J_{32}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	+
$J_{33}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	+
$J_{36}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	+
$J_{39}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	+
$J_{42}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	+
$J_{43}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	+
$J_{45}$	$\{E_{2,1} - 2E_{3,2}\}$	$\{E_{2,1} - 2E_{3,2}\}$	+
$J_{48}$	$\{E_{3,1}, E_{4,1} - 2E_{2,4}\}$	$\{E_{3,1}, E_{4,1} - 2E_{2,4}\}$	+
$J_{49}$	$\{E_{3,1} - 2E_{2,4}, E_{4,1} - 2E_{2,3} - 2E_{2,4}\}$	$\{E_{3,1} - 2E_{2,4}, E_{4,1} - 2E_{2,3} - 2E_{2,4}\}$	+
$J_{50}$	$\{E_{3,1} + 2E_{4,2}, E_{4,1}\}$	$\{E_{3,1}, E_{4,1}, E_{4,2}\}$	-
$J_{52}$	$\{E_{2,1} - 2E_{4,2}, E_{3,1}\}$	$\{E_{2,1} - 2E_{4,2}, E_{3,1}\}$	+
$J_{53}$	$\{E_{2,1} + 2E_{3,2} - 2E_{4,2}, E_{3,1}\}$	$\{E_{2,1} + 2E_{3,2} - 2E_{4,2}, E_{3,1}\}$	+
$J_{55}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1} + 2E_{3,4}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}, E_{3,4}\}$	-
$J_{56}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}\}$	+
$J_{57}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1} + 2E_{3,4}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}, E_{3,4}\}$	-
$J_{58}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1} + 2E_{2,4}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}, E_{2,4}\}$	-
$J_{59}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1} + 2E_{2,4}, E_{4,1} + 2E_{2,3} + 2E_{2,4}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}, E_{2,3}, E_{2,4}\}$	-
$J_{60}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1} - 2E_{4,2}, E_{4,1}\}$	$\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}, E_{4,2}\}$	-
$J_{61}$	0	0	+
$J_{62}$	$\{E_{3,4}\}$	$\{E_{3,4}\}$	+
$J_{63}$	$\{E_{3,1} + E_{3,4}\}$	$\{E_{3,1} + E_{3,4}\}$	+
$J_{64}$	$\{E_{3,1} + E_{3,4}\}$	$\{E_{3,1} + E_{3,4}\}$	+
$J_{65}$	$\{E_{3,1}\}$	$\{E_{3,1}\}$	+

$\mathcal{J}_{66}$	0	0	+
$\mathcal{J}_{69}$	0	0	+
$\mathcal{J}_{70}$	0	0	+

### REFERENCES:

- [1] Hegazi A.S., Abdelwahab H., Classification of five-dimensional nilpotent Jordan algebras, *Linear Algebra and its Applications*, 494 (2016), 165–218. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2016.01.015>
- [2] Johnson B., Local derivations on  $C^*$ -algebras are derivations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001), 313–325. DOI: 10.2307/221975
- [3] Jordan P., von Neumann J., Wigner E., On an algebraic generalisation of the quantum mechanical formalism, *Annals Math.* 35 (1934), 29–64.
- [4] Kadison R., Local derivations, *Journal of Algebra*, 130 (1990), 2, 494–509.
- [5] Kashuba I., Martin M.E., The variety of three-dimensional real Jordan algebras, *Journal of Algebra and Its Applications*. Vol. 15 (2016), No. 08, 16501589. <https://doi.org/10.1142/S0219498816501589>
- [6] Kashuba I., Shestakov I., Jordan algebras of dimension three: geometric classification and representation type, in: *Actas del XVI Coloquio Latinoamericano de Algebra*, Colonia del Sacramento, Uruguay, 2005, in: *Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana*, 2007, pp. 295–315.
- [7] I. Kashuba, M.E. Martin, Deformations of Jordan algebras of dimension four, *Journal of Algebra* **399**, 277–289 (2014).
- [8] D.R. Larson, A.R. Sourour, Local derivations and local automorphisms of  $B(X)$ , *Proc. Sympos. Pure Math.*, 51, Part 2, Providence, Rhode Island 1990, 187–194.
- [9] M.E. Martin, Four dimensional Jordan algebras, *Int. J. Math. Game Theory Algebra* 20 (2013), 41–59.

## HYPERSPACE AND DUGUNDJI COMPACTA

*Atamuradova Dilshoda Ravshankulovna – teacher, Toshkent State Pedagogical*

*University, e-mail: [dilshodaatamuradova09@gmail.com](mailto:dilshodaatamuradova09@gmail.com),*

*Hamroqulova Dilnoza Axmed qizi – student, Toshkent State Pedagogical*

*University, e-mail: [DilnozaaHamroqulova@gmail.com](mailto:DilnozaaHamroqulova@gmail.com)*

*Ayubov Komiljon Mansurjon o'g'li - student, Toshkent State Pedagogical*

*University, e-mail: [ayubovkomiljon2509@gmail.com](mailto:ayubovkomiljon2509@gmail.com)*

**Theorem 1.** If  $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$  is a system of consistent continuous maps on  $X$  then  $\exp(L) = \{\exp f_\alpha, \exp f_{\beta\alpha}; A\}$  is a family of consistent continuous maps on  $\exp X$

**Proof.** Since  $\exp$  is a covariant functor, then the maps

$$\begin{aligned} \exp f_\alpha &: \exp X \rightarrow \exp f_\alpha(X), \\ \exp f_{\beta\alpha} &: \exp f_\beta(X) \rightarrow \exp f_\alpha(X), \quad \alpha, \beta \in A, \alpha < \beta. \end{aligned}$$

are defined as well. We establish that

(i) the diagonal product  $\Delta_{\alpha \in A} \exp f_\alpha : \exp X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} (\exp f_\alpha)(\exp X)$  is embedding;

(ii)  $\exp f_\alpha = (\exp f_{\beta\alpha}) \circ (\exp f_\beta)$ ,  $\alpha, \beta \in A$ ,  $\alpha < \beta$ .

But, equality (ii) immediately follows from that the functor  $\exp$  is covariant and the equality  $f_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ f_\beta$  holds for all  $\alpha, \beta \in A$ ,  $\alpha < \beta$ .

Since all the maps  $f_\alpha$  are continuous, then  $\exp f_\alpha$  is also a continuous map.

Hence, the diagonal product  $\Delta_{\alpha \in A} (\exp f_\alpha)$  is continuous. Besides, because  $f_\alpha$

surjective, since the functor  $\exp$  is normal, we have

$(\exp f_\alpha)(\exp X) = \exp f_\alpha(X)$ ,  $\alpha \in A$ . Now it is enough to show that the diagonal product

$\Delta_{\alpha \in A} (\exp f_\alpha) : \exp X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} (\exp f_\alpha)(\exp X)$  is injective. Let  $F_1, F_2 \in \exp X$ ,  $F_1 \neq F_2$ . Then there

exists  $x \in ((F_2 \setminus F_1) \cup (F_1 \setminus F_2))$ . Definitely, suppose  $x \in F_2 \setminus F_1$ . Since the diagonal

product  $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$  is embedding, then  $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(x) \neq \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(y)$  for all  $y \in F_1$ . It follows that

$\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(x) \notin \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(F_1)$  being  $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(x) \in \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(F_2)$ . So,  $(\Delta_{\alpha \in A} (\exp f_\alpha))(F_1) \neq (\Delta_{\alpha \in A} (\exp f_\alpha))(F_2)$

Theorem 1 is proved.

**Corollary 1.** If a consistent system  $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$  of continuous maps on  $X$  is weakly multiplicative, then the consistent system  $\exp(L) = \{\exp f_\alpha, \exp f_{\beta\alpha}; A\}$  of continuous maps on  $\exp X$  also is weakly multiplicative.

It is easy to observe, that Proposition 6 and Theorem 1 imply an important property of the system  $\exp(L) = \{\exp f_\alpha, \exp f_{\beta\alpha}; A\}$ .

**Corollary 2.** If a consistent system  $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$  of continuous maps on  $X$  is open ( $d$ -open), then the consistent system  $\exp(L)$  of continuous maps on  $\exp X$  is also open ( $d$ -open).

From the results of the work we get the following statement.

**Lemma 4.** If a consisted system  $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$  continuous maps on  $X$  be equivariant, then the a consisted system  $\exp(L)$  continuous maps on  $\exp(X)$  is also equivariant.

Now we will prove the following statement.

**Lemma 5.** If a consisted system  $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$  continuous maps on  $X$  be  $\mu$ -system, then the a consisted system  $\exp(L)$  continuous maps on  $\exp X$  is also  $\mu$ -system.

**Proof.** It is known, that for the metrizable space  $Y$ , the space  $\exp Y$  is also metrizable. In addition, if  $f : X \rightarrow Y$  is continuous one-to-one mapping "to", then  $\exp f : \exp X \rightarrow \exp Y$  is also continuous one-to-one mapping "to". It follows that if  $X$  is submetrizable, then  $\exp X$  is also submetrizable. Now from the theorem \ref{theo1} follows that if the family  $\Delta\{f_\alpha \in L : f_\alpha(X) \text{ submetrizable}\}$  is  $\mu$ -system, then  $\Delta\{\exp f_\alpha \in \exp(L) : (\exp f_\alpha)(\exp X) \text{ submetrizable}\}$  forms  $\mu$ -system.

Summarizing all results obtained, now we can formulate the following statement.

**Theorem 2.** If a space  $X$  be  $od$ -space ( $d$ -space), then the hyperspace  $\exp X$  is also  $od$ -space ( $d$ -space).

To state the further result, we need the following two propositions.

**Proposition 8.** Let an action on  $X$  be weakly  $d$ -open, the family  $\mathcal{O} \subset \mathcal{N}_G(e)$  such that:

- (i) for any  $O, U \in \mathcal{O}$  there exist  $V \in \mathcal{O}$  such that  $V \subset O \cap U$ ;
- (ii) for each  $O \in \mathcal{O}$  there is  $U \in \mathcal{O}$  such that  $U^2 \subset O$  and  $U^{-1} \subset O$ .

If the family  $\mathcal{O}$  in addition the conditions (i) and (ii) satisfies following condition:

(iii) for every  $O \in \mathcal{O}$  and  $g \in G$  exist  $V \in \mathcal{O}$  such that  $gVg^{-1} \subset O$ , then  $X$  in topology  $\tau_{\mathcal{O}}$  is  $G$ -space (not necessarily Tychonoff).

Let  $\mathcal{F}$  be a family of equivariant factor maps of  $G$ -space  $X$ . We put  $f \geq h, f, h \in \mathcal{F}$ , if there exists  $p_{fh}: f(X) \rightarrow h(X)$  such that  $p_{fh} \circ f = h$ . Note that in this case the map  $p = p_{fh}$  is equivariant. Indeed, let  $y = f(x) \in f(X)$  and  $g \in G$ . To prove the equality  $p(gy) = gp(y)$  is enough to show that  $h^{-1}(p(gy)) = h^{-1}(gp(y))$ . The last equality follows from the following:

$$h^{-1}(p(gy)) = h^{-1}(p(g(f(y)))) = h^{-1}(p(f(gx))) = h^{-1}(h(gx)) = h^{-1}(gh(x)) = h^{-1}(g(p(f(x)))) = h^{-1}(g(p(y))).$$

After identifying the map  $f, h \in \mathcal{F}$  such that  $f \geq h$  and  $h \geq f$  (equivalence relation on  $\mathcal{F}$ ), family of equivalence classes (we will denote it by  $\mathcal{F}$ ) becomes a partially ordered set.

**Proposition 9.** Let  $X$  be a  $G$ -space with weakly  $d$ -open action, satisfying the following property:

(s) for every points  $x$  and their neighborhoods  $W$  there exist such (countable) family  $\mathcal{O}_{xW} \subset \mathcal{N}_G(e)$ , satisfying the conditions (i) - (iii) of proposition 8, for which there is  $O \in \mathcal{O}_{xW}$  and  $\text{St}(x, \gamma_O) \cap (X \setminus W) = \emptyset$ .

Then for the family  $\mathcal{F}$  an equivariant factor map of  $X$  the family  $L = \{f \in \mathcal{F}; p_{fh}, f, h \in \mathcal{F}, f \geq h; \mathcal{F}\}$  is consistent weakly multiplicative equivariant system (correspondingly,  $\mu$ -system) of maps on  $X$ .

Classes of compact  $od$ - and  $d$ -spaces coincide with the class of Dugundji compacta (see., Proposition 2), and the Stone-Čech compactification  $\beta X$  space of  $X$  is Dugundji compacta if and only if,  $X$  is a pseudo-compact  $d$ -space.

We consider the property (s) with a counting condition.

**Theorem 3.** Let  $X$  be a  $G$ -space with open action, satisfying property (s). Then the hyperspace  $\exp X$  is  $od$ -space with a consistent weakly multiplicative equivariant open  $\mu$ -system of maps. If  $X$  is compact, then  $\exp_n X$  is a Dugundji compacta.

### REFERENCES:

1. W. Y. Hsiang, Cohomological theory of topological transformation groups. (Mir, Moscow, 1979).
2. A. A. Zaitov, "The functor of order-preserving functionals of finite degree." Journal of Mathematical Sciences 133, 1602–1603 (2006), <https://doi.org/10.1007/s10958-006-0071-4>.
3. Д.Р.Атамурадова. Рекомендации по самостоятельному изучению темы «Топологические пространства. Открытые и замкнутые множества». //Научный вестник Ташкентского государственного педагогического университета. 2020, № 12, стр. 271-274.

## UCH O'LCHAMLI NILPOTENT ALGEBRALARIDA IKKI LOKAL DIFFERENSIALLASH

*Boydadayev Islomjon*

*Namangan davlatuniversiteti, Namangan, O'zbekiston;*

*boydadayevislomjon06@gmail.com*

Bu ishda bazi uch o'lchovli ilpotent algebralarda ikki local differensiallashi differensiallash bo'ladigan algebralari ko'rsatilgan.

**1-Ta'rif.** Agar  $d: L \rightarrow L$  chiziqli akslantirish  $F$  maydonida berilgan  $L$  algebaradan olingan ixtiyoriy  $x, y$  elementlar uchun quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

$U$  holda, akslantirish  $L$  algebrada differensiallash deb ataladi.

$d(x) = Ax$  chiziqli akslantirish niqaraylik, buyerda  $A - n \times n$  o'lchamli kvadrat matritsa.

Ravshanki, agar  $L$  algebradan olingan ixtiyoriy  $x, y$  elemenlar uchun

$$A(xy) = (Ax)y + x(Ay) \quad (1)$$

tenglik bajarilsa  $d(x) = Ax$  akslantirish qaralayotgan  $L$  algebra differensiallashdan iborat bo'ladi.

**1-teorema**. Ixtiyoriy uch o'lchamli nilpotent algebra bazislari  $\{e_1, e_2, e_3\}$  bo'lgan  $N_1$  va  $N_2$  algebralarining differensialshlari mos ravishda

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ \beta & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi.

**2-ta'rif**. Akslantirish (chiziqli bo'lishi shart bo'lmagan)  $\nabla: A \rightarrow A$  2-lokal differensialshlari deyiladi, agar har qanday  $x, y \in A$  elementlar uchun shunday  $\nabla_{x,y}: A \rightarrow A$  differensialshlari mavjud bo'lsaki,  $\nabla(x) = A_{x,y}(x)$ ,  $\nabla(y) = A_{x,y}(y)$ .

Teorema[4].  $N_1$  algebraning har bir 2-lokal differensialshi differensialshdir.

**Isbot**. Aytaylik  $\nabla$  - bu  $N_1$  ning ixtiyoriy 2-lokal differensialshlari bo'lsin.

U holda, tarifga ko'ra har bir  $x \in N_1$  element uchun,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

$\alpha_{x,e_1}, \beta_{x,e_1}$  shunday elementlar mavjudki

$$A_{x,e_1} = \begin{pmatrix} \alpha_{x,e_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_{x,e_1} & 0 \\ \beta_{x,e_1} & 0 & 4\alpha_{x,e_1} \end{pmatrix},$$

$\nabla(x) = A_{x,e_1} \bar{x}$ , bu yerda  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T - x$  ga mos vektor va

$$\nabla(e_1) = A_{x,e_1} \bar{e}_1 = (\alpha_{x,e_1}, 0, \beta_{x,e_1})^T.$$

Tengliklar  $\nabla(e_1) = \varphi_{x,e_1}(e_1) = \nabla_{y,e_1}(e_1)$  o'rinli bo'lgani uchun

$$\nabla(e_1) = (\alpha_{x,e_1}, 0, \beta_{x,e_1})^T =$$

$$= (\alpha_{y,e_1}, 0, \beta_{y,e_1})^T$$

$N_1$  dagi elementlarning har bir  $x, y$  juftligi uchun .

SHunday kilib ,

$$\alpha_{x,e_1} = \alpha_{y,e_1}, \beta_{x,e_1} = \beta_{y,e_1}.$$

Shuning uchun

$$\nabla(x) = A_{y,e_1} \bar{x}$$

Har qanday  $x \in N_1$  uchun va  $\nabla(x)$  matritsasi  $x$  ga bog'liq emas.

SHunday kilib, 1-teoremaga ko'ra ,  $\nabla$  differensialshdir.

Teorema[4]. $N_2$  algebraning har bir 2-lokal differensialshi differensialshdir.

### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Kadison R., Local derivations, Journal of Algebra, 130 (1990), 2, 494–509.
2. Semrl P., Local automorphisms and derivations on  $B(H)$ , Proceedings of the American Mathematical Society, 125(1997), 2677–2680.
3. Sh.Ayupov, A.Khudoyberdiyev, B.Yusupov. Local and 2-Local Derivations of Solvable Leibniz Algebras. International Journal of Algebra and Computation. 30(06), (2020). 1185-1197
- 4.Boydadayev I. Ucho'lchamli nilpotent algebralarningdifferensiallashlari. Mathematics, MechanicsandIntellectual Technologies Tashkent-2023 (299)

## UCH O'LCHAMLI BA'ZI NILPOTENT ALGEBRALARDA IKKI LOKAL AVTOMORFIZMLAR

*Jo'rayev Avazbek*

*Namangan davlat universiteti magistranti*

[jorayevavazbek96@gmail.com](mailto:jorayevavazbek96@gmail.com)

**1-ta'rif.** Agar  $d: L \rightarrow L$  chiziqli akslantirish  $F$  maydonda berilgan  $L$  algebaradan olingan ixtiyoriy  $x, y$  elementlar uchun quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

*U holda, akslantirish  $L$  algebrada avtomorfizmlash deb ataladi.*

$d(x) = Ax$  chiziqli akslantirishni qaraylik, bu yerda  $A - n \times n$  o'lchamli kvadrat matritsa. Ravshanki, agar  $L$  algebradan olingan ixtiyoriy  $x, y$  elementlar uchun

$$A(xy) = (Ax)y + x(Ay) \quad (1)$$

tenglik bajarilsa  $d(x) = Ax$  akslantirish qaralayotgan  $L$  algebrada *avtomorfizmlash* dan iborat bo'ladi.

**1-teorema** . Ixtiyoriy uch o'lchamli nilpotent algebra bazislari  $\{e_1, e_2, e_3\}$  bo'lgan  $N_1$  va  $N_2$  algebralarning avtomorfizmlari mos ravishda

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ \beta & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi.

**2-ta'rif**. Akslantirish (chiziqli bo'lishi shart bo'lmagan)  $\varphi: A \rightarrow A$  2-lokal avtomorfizm deyiladi, agar har qanday  $x, y \in A$  element uchun shunday

$$\phi_{x,y}: A \rightarrow A \text{ avtomorfizm mavjud bo'lsaki, } \phi(x) = A_{x,y}(x), \phi(y) = A_{x,y}(y).$$

**2-teorema**.  $N_1$  algebraning har bir 2-lokal avtomorfizmi avtomorfizmdir.

**Isbot**. Aytaylik  $\phi$  – bu  $N_1$  ning ixtiyoriy 2-lokal avtomorfizmi bo'lsin. U holda, ta'rifga ko'ra, har bir  $x \in N_1$  element uchun,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

$\alpha_{x,e_1}, \beta_{x,e_1}$  shunday elementlar mavjudki,

$$A_{x,e_1} = \begin{pmatrix} \alpha_{x,e_1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{x,e_1}^2 & 0 \\ \beta_{x,e_1} & 0 & \alpha_{x,e_1}^4 \end{pmatrix},$$

$\phi(x) = A_{x,e_1} \bar{x}$ , bu yerda  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T - x$  ga mos vektor va

$$\phi(e_1) = A_{x,e_1} \bar{e}_1 = (\alpha_{x,e_1}, 0, \beta_{x,e_1})^T.$$

Tengliklar  $\phi(e_1) = \varphi_{x,e_1}(e_1) = \varphi_{y,e_1}(e_1)$  o'rinli bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= (\alpha_{x,e_1}, 0, \beta_{x,e_1})^T = \\ &= (\alpha_{y,e_1}, 0, \beta_{y,e_1})^T \end{aligned}$$

$N_1$  dagi elementlarning har bir  $x, y$  juftligi uchun. Shunday qilib,  $\alpha_{x, e_1} = \alpha_{y, e_1}, \beta_{x, e_1} = \beta_{y, e_1}$ . Shuning uchun

$$\phi(x) = A_{y, e_1} \bar{x}$$

Har qanday  $x \in N_1$  uchun va  $\phi(x)$  matritsani  $x$  ga bog'liq emas. Shunday qilib, 1-teoremaga ko'ra  $\phi$  avtomorfizmdir.

**3-teorema.**  $N_2$  algebraning har bir 2-lokal avtomorfizmi avtomorfizmdir.

### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Kadison R., Local derivations, Journal of Algebra, 130 (1990), 2, 494–509.
2. Semrl P., Local automorphisms and derivations on  $B(H)$ , Proceedings of the American Mathematical Society, 125(1997), 2677–2680.
3. Sh.Ayupov, A.Khudoyberdiyev, B.Yusupov. Local and 2-Local Derivations of Solvable Leibniz Algebras. [International Journal of Algebra and Computation](#). 30(06), (2020). 1185-1197
4. Jo'rayev A. Uch o'lchovli Nilpotent algebralarining avtomorfizmlari. Mathematics, mechanics and intellectual technologies, 301, Tashkent-2023

## UCH O'LCHAMLI LI ALGEBRALARINING LOKAL ICHKI

### DIFFERENSIALLASHLARI

*Jumayeva Charos Ilhomjon qizi,*

*Buxoro davlat universiteti,*

[charosjumayeva2801@gmail.com](mailto:charosjumayeva2801@gmail.com)

Ushbu tezisda uch o'lchovli Li algebralarining lokal ichki differensiallashlari o'rganiladi. Li algebrasining ta'rifini keltiramiz.

**Ta'rif 1.**  $F$  maydon ustidagi  $L$  algebrada ixtiyoriy  $x, y, z \in L$  elementlar uchun quyidagi ayniyatlar bajarilsa:

1.  $[x, y] = -[y, x]$  – antikommutativlik ayniyati,
2.  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  – Yakobi ayniyati,

u holda  $L$  algebraga Li algebrasi deyiladi, bu yerda  $[x, y]$  –  $L$  dagi ko'paytma.

$L$  cheklangan o'lvovli Li algebra bo'lsin.  $L$  Li algebra uchun quyidagi markaziy va hosilaviy qatorlarni ko'rib chiqamiz:

$$L^1 = L, L^i = [L^{i-1}, L], i \geq 1,$$

$$L^{[1]} = L, L^{[k]} = [L^{[k-1]}, L^{[k-1]}], k \geq 1.$$

**Ta'rif 2.** Aytaylik,  $d: L \rightarrow L$  chiziqli akslantirish bo'lsin. Agar ixtiyoriy  $x, y \in L$  elementlar uchun quyidagi tenglik bajarilsa:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)],$$

u holda  $d$  chiziqli akslantirish  $L$  algebrada differentsiallash deyiladi. Barcha ichki differentsiallashlar to'plami  $Der(L)$  kabi belgilanadi.[1]

**Ta'rif 3.** Ixtiyoriy  $x \in L$  uchun  $ad_a(x) = [x, a]$  kabi aniqlangan  $ad_a: L \rightarrow L$  akslantirish differentsiallash bo'ladi va bunday differentsiallashlar ichki differentsiallashlar deb ataladi. Barcha ichki differentsiallashlar to'plami  $InDer(L)$  kabi belgilanadi.[2]

**Ta'rif 4.** Chiziqli operator  $\Delta: L \rightarrow L$  lokal ichki differentsiallash deyiladi, agar barcha  $x \in L$  uchun,  $ad_x: L \rightarrow L$  ichki differentsiallash ( $x$  ga bog'liq bo'lgan) mavjud bo'lib  $\Delta(x) = ad_x(x)$  tengligi bajarilsa.[3]

**Teorema 1.** Ixtiyoriy uch o'lvovli Li algebrasi quyidagi algebralardan biriga izomorf bo'ladi:

$$L_0: \text{abel}, L_1: [e_1, e_2] = e_3, L_2: [e_1, e_2] = e_1, L_3: [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3$$

$$L_4: [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3, \lambda \in C^*, |\lambda| \leq 1,$$

$$L_5: [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -2e_1, [e_2, e_3] = 2e_2$$

**Teorema 2.** Uch o'lvovli Li algebralaridagi har qanday lokal ichki differentsiallash ichki differentsiallashdir.[4]

4-ta'rifga ko'ra ushbu olti algebradagi har qanday lokal ichki differentsiallash ichki differentsiallash ekanligi isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Kadison R.V., Lokal derivatsiyalar, J. Algebra, 130 (1990) 494–509.

2. A.Alauadinov, Ch.Jumayeva. Local inner derivations on four-dimensional Lie algebras. Qoraqalpog‘istonda fan va ta’lim. 2022 y. 1 - son. 22-29 b
3. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., 2-Chekli o‘lchovli Li algebraida lokal avtomorfizmlar // Chiziqli algebra va uning qo‘llanilishi. 507(2016 yil), b.121–131
4. A.Alauadinov, Ch.Jumayeva. Local innerderivations on three-dimensional Lie algebras. Fan va jamiyat. 2022 y. 2- son. 5-8 b.

**KELI DARAXTI GRUPPAVIY TASVIRINING QO‘SHNI  
SINFLARDA BERILGAN SONLARGA KO‘RA RADIUSI 2 GA TENG  
BO‘LGAN SHARLARDA INDEKSI 4 BO‘LGAN NORMAL QISM  
GRUPPASINI QURISH.**

*Kamoldinov Sardorbek Maxammadsobir o‘g‘li*

*O‘ZMU magistranti*

[kamoldinovs03@gmail.com](mailto:kamoldinovs03@gmail.com)

Har bir uchidan  $k + 1$  ta qirra chiquvchi, siklga ega bo‘lmagan cheksiz graf- $k$ -tartibli Keli daraxti deyiladi va  $T^k = (V, L)$  kabi belgilandi. Bu yerda:  $V$  – daraxtning uchlari toplami,  $L$  – daraxtning qirralari to‘plami. [3]

$G_k$  tashkil etuvchilari  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$  bo‘lgan ikkinchi tartibli siklik gruppalarining erkin ko‘paytmasidan iborat gruppasi. [3]

[1] maqolada  $T^k$  daraxt uchlari to‘plami  $V$  va  $G_k$  gruppasi orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan.

[3] maqolada bo‘sh bo‘lmagan  $A, B \subset N_k = \{1, 2, \dots, k + 1\}$  to‘plamlar uchun

$H_0 = H_A \cap H_B = \{x \in G_k \mid \sum_{i \in A} w_x(a_i) - juft, \sum_{i \in B} w_x(a_i) - juft\}$  to‘plam,  $G_k$  gruppaning

indeksi 4 ga teng normal qism gruppasi ekanligi ko‘rsatilgan.

Bu yerda  $H_A \cap H_B$  qisqarmaydigan kesishma  $w_x(a_i) - x \in G_k$  elementdagi  $a_i$  tashkil etuvchilar soni.

$H_0 - G_k$  gruppaning indeksi  $r$  bo‘lgan normal qism gruppasi bo‘lsin ( $r \geq 1$ ).

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

1.  $d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d\}$   $x$  va  $y$  uchlari orasidagi masofa, bu yerda  $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$  – eng yaqin qo‘shnilar.

2.  $V_2(x) = \{y \in V \mid d(x, y) \leq 2\}$  markazi  $x$  nuqtada radiusi 2 ga teng bo‘lgan shar.  
 $|V_2(x)| = (k+1)^2 + 1$

3.  $q_{i,2}(x) = |V_2(x) \cap H_i|$ ,  $i = \overline{0, r-1}$ ,

4.  $Q_2(x) = (q_{0,2}(x), q_{1,2}(x), \dots, q_{r-1,2}(x))$ .

**Teorema.**[3]  $\forall x \in G_k$  uchun  $\exists \pi_x$  o‘rinlashtirish mavjudki,  $Q_2(e)$  vektor koordinatalari uchun  $\pi_x Q_2(e) = Q_2(x)$  tenglik o‘rinli bo‘ladi, bu yerda  $e \in G_k$  gruppaning birlik elementi.

Quyidagi masalani qaraymiz:

$k_0, k_1, k_2, k_3 \in N \cup \{0\}$  sonlari uchun  $\exists A, B \subset N_k$  larni topingki,  $H_0 = H_A \cap H_B$  normal qism gruppasi  $G_k$  uchun  $q_{i,2}(x) = k_i$  tenglik o‘rinli bolsin. Teorema 1 ga ko‘ra bu masalani  $x = e$  uchun ko‘rishimiz yetarli. Qulaylik uchun bu ishda  $A \cap B = \emptyset$  va  $A \cup B = N_k$  bo‘lgan holni qaraymiz.

**Teorema.**  $A, B \subset N_k$  uchun  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = N_k$  va  $|A| = m$  bo‘lganda  $k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = (k+1)^2 + 1$  shartni qanoatlantiruvchi  $k_0, k_1, k_2, k_3 \in N \cup \{0\}$  lar mavjud bo‘lib, ular uchun  $k_i = q_{i,2}(e)$ ,  $i = \overline{0, 3}$  bo‘ladigan  $H_0 = H_A \cap H_B \subset G_k$  normal qism gruppasi mavjud bo‘ladi.

### Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Ганиходжаев Н.Н. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли. // Доклады АН РУз. – Ташкент, 1994. – № 4. – С.3-5.
2. Норматов Э.П., Жиянбеков Э.Ё Структура разбиений шара с конечным радиусом на деревья Кэли Термез 22.10.2020-г. – С. –38.
3. Розиков У.А. Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1997. – Т.112. – № 1. – С.170-176.

## **W\* - REPRESENTATIONS IN REAL W\* - ALGEBRAS**

*Z.X.Khusanboeva, N.J.Shodiyonov, Kh.Kh.Boltaev*

*Tashkent State Pedagogical University named after Nizami,*

*Tashkent, Uzbekistan.*

[Zulfizarxon2809@gmail.com](mailto:Zulfizarxon2809@gmail.com), [bkhabibzhan2020@mail.ru](mailto:bkhabibzhan2020@mail.ru)

In 1930's von Neumann and Murray introduced the notion of the coupling constant for finite factors (see [4-6]). In 1983, V. Jones suggested a new approach to this notion, defined the notion of the index for type  $II_1$  factors, and proved a surprising theorem on values of the index for subfactors (see [2]).

Let  $B(H)$  be the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space  $H$ . A weakly closed  $*$ -subalgebra  $\mathfrak{A}$  containing the identity operator  $I \in B(H)$  is called a  $W^*$ -algebra. A real  $*$ -subalgebra  $\mathfrak{R} \subset B(H)$  is called a real  $W^*$ -algebra if it is closed in the weak operator topology and  $\mathfrak{R} \cap i\mathfrak{R} = \{0\}$ . A real  $W$ -algebra  $\mathfrak{R}$  is called a real factor if its center  $Z(\mathfrak{R})$  consists of the elements  $\{\lambda \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ . We say that a real  $W^*$ -algebra  $\mathfrak{R}$  is of the type  $I_{fin}, I_\infty, II_1, II_\infty$ , or  $III_\lambda$ , ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) if the enveloping  $W^*$ -algebra  $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$  has the corresponding type in the ordinary classification of  $W^*$ -algebras. A linear mapping  $\alpha$  of an algebra into itself with  $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$  is called an  $*$ -automorphism if  $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ ; it is called an involutive  $*$ -antiautomorphism if  $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$  and  $\alpha^2(x) = x$ . If  $\alpha$  is an involutive  $*$ -antiautomorphism of a  $W^*$ -algebra  $M$ , we denote by  $(M, \alpha)$  the real  $W^*$ -algebra generated by  $\alpha$ , i.e.  $(M, \alpha) = \{x \in M: \alpha(x) = x^*\}$ . Conversely, every real  $W^*$ -algebra  $\mathfrak{R}$  is of the form  $(M, \alpha)$ , where  $M$  is the complex envelope of  $\mathfrak{R}$  and  $\alpha$  is an involutive  $*$ -antiautomorphism of  $M$  (see [1,3,7]). Therefore we shall identify from now on the real von Neumann algebra  $\mathfrak{R}$  with the pair  $(M, \alpha)$

Let  $M(\subset B(H))$  be a finite factor and let  $\tau$  be the unique faithful normal tracial state of  $M$ . If  $\alpha$  is an involutive  $*$ -antiautomorphism of  $M$ , then it is clear that  $\tau$  is automatically  $\alpha$ -invariant. Denote by  $L^2(M)$  the completion of  $M$  with respect to the norm  $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$ . Similarly by  $L^2(M, \alpha)$  we denote the completion of the

real factor  $(M, \alpha)$ . Then it is obvious that the Hilbert space  $L^2(M)$  and the algebra  $B(L^2(M))$  of all bounded linear operators on it are the complexifications of the real Hilbert space  $L^2(M, \alpha)$  and of  $B_r(L^2(M, \alpha))$ , respectively, where  $B_r(L^2(M, \alpha))$  is the algebra of all bounded linear operators on the real Hilbert space  $L^2(M, \alpha)$ . Moreover, it is easy to show that the Hilbert spaces  $L^2(M, \alpha)$  and  $L^2(M)$  are separable.

For each  $x \in M$ , set  $\lambda(x)y = xy$ , for all  $y \in M$ . Clearly,  $\|\lambda(x)y\|_2 \leq \|x\| \|y\|_2$ . Thus  $\lambda$  can be uniquely extended to a bounded linear operator on  $L^2(M)$ , still denoted by  $\lambda(x)$ . Then we obtain a faithful  $W^*$ -representation  $(\lambda, L^2(M))$  of  $M$ . In a similar way, taking the map  $\lambda_r$  defined as  $\lambda_r(x)y = xy$  (for all  $y \in (M, \alpha)$ ) we obtain a faithful real  $W^*$ -representation  $(\lambda_r, L^2(M, \alpha))$  of  $(M, \alpha)$ .

**Theorem 1.** The map  $\beta: \lambda(M) \rightarrow \lambda(M)$  defined as  $\beta(\lambda_x) = \lambda_{\alpha(x)}$  is an involutive  $W^*$ -antiautomorphism of  $\lambda(M)$ . Moreover,  $\beta$  and  $\alpha$  are also related in the following way:  $(M, \alpha)_\beta = \lambda_r(M, \alpha)$ , where  $(M, \alpha)_\beta = \{\lambda_x \in \lambda(M): \beta(\lambda_x) = \lambda_x^*\}$  is the real  $W^*$ -algebra, generated by  $\beta$ , i.e.  $(M, \alpha)_\beta = (\lambda(M), \beta)$ .

**Corollary 1.**  $\lambda_r(M, \alpha)$  is a real  $W$ -algebra, and  $\lambda(M)$  is the complexification of  $\lambda_r(M, \alpha)$ , i.e.  $\lambda_r(M, \alpha) + i\lambda_r(M, \alpha) = \lambda(M)$ . Moreover,  $\{\lambda_r, L^2(M, \alpha)\}$  is a faithful real  $W^*$ -representation of  $(M, \alpha)$ .

This representation will be called the canonical  $W^*$ -representation of  $(M, \alpha)$ .

Since  $\|x\|_2 = \|x^*\|_2$  for all  $x \in M$ , the map  $J: x \rightarrow x^*$  can be uniquely extended to a conjugate linear isometry on  $L^2(M)$ , still denoted by  $J$ . From the theory of  $W^*$  algebras it is well-known that  $\lambda(M)' = J\lambda(M)J$  and  $\lambda(M) = J\lambda(M)'J$ . Similarly, to Theorem 1 and Corollary 1 we have the following assertion.

**Theorem 2.** The map  $\beta': \lambda(M)' \rightarrow \lambda(M)'$  defined as  $\beta'(\cdot) = J\beta(J \cdot J)J$ , is an involutive  $W^*$ -antiautomorphism of  $\lambda(M)'$ . The set  $\lambda_r(M, \alpha)' = \{\lambda_{x'} \in \lambda(M)': \beta'(\lambda_{x'}) = \lambda_{x'}^*\}$  is a real  $W^*$ -algebra, and  $\lambda(M)'$  is the complexification of  $\lambda_r(M, \alpha)'$ , i.e.  $\lambda_r(M, \alpha)' + i\lambda_r(M, \alpha)' = \lambda(M)'$ .

We have the following connection between  $\lambda_r(M, \alpha)$  and  $\lambda_r(M, \alpha)'$ .

**Theorem 3.**  $\lambda_r(M, \alpha)' = J\lambda_r(M, \alpha)J$ .

**Theorem 4.** The real  $W^*$ -algebra  $\lambda_r(M, \alpha)'$  is the commutant of  $\lambda_r(M, \alpha)$  in the algebra  $B_r(L^2(M, \alpha))$ , i.e.  $\lambda_r(M, \alpha)' = \{\lambda_x \in B_r(L^2(M, \alpha)) : \lambda_x \lambda_y = \lambda_y \lambda_x, \forall \lambda_y \in \lambda_r(M, \alpha)\}$ .

The authors express their deep gratitude to Professor Rakhimov Abgaffar Abdumajidovich for helpful advice when working on the article.

#### REFERENCES:

1. Sh.A. Ayupov, A.A. Rakhimov, Sh.M. Usmanov, Jordan, real and Lie structures in operator algebras. Kluw. Acad. Pub., MAIA. 418 (1997).
2. V.F.R. Jones, Index for Subfactors. *Inventiones Math.* 72 (1983), 1 – 25.
3. V.F.R. Jones, On knots invariants related to some statistical mechanical models. *Pacific J. Math.*, 137 (1989), 311 – 334.
4. F.J. Murray, J. von Neumann, On rings of operators. *Ann. Math.*, 37 (1936), 116 – 229.
5. F.J. Murray, J. von Neumann, On rings of operators, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 (1937), 208 – 248.
6. F.J. Murray, J. von Neumann, On rings of operators, IV. *Ann. Math.*, 44 (1943), 716 – 808.
7. A.A. Rakhimov, Injective real  $W^*$ -factors of type  $III_\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ . *Funct. Anal. and its Applications*, 3 (1997), 41 – 44.

### CONTINUITY OF THE FUNCTOR OF HYPERSPACES WITH FINITELY MANY COMPONENTS

*Mamadaliev N.K.<sup>1</sup>, Eshtemirova Sh.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky,*

<sup>2</sup>*Tashkent State Pedagogical University named after Nizami*

*Emails: nodir\_88@bk.ru, ms.eshtemirova@mail.ru*

In the paper we investigate continuity property of hyperspaces of closed sets consisting of finitely many of components. It is proved that the functor  $C_n : Comp \rightarrow Comp$  preserves inverse limits.

In recent times in the investigations [1] and [2] the concept of hyperspace of nonempty closed sets consisting of finitely many of components is introduced. For the space  $X$  by  $C_n(X)$  denote the set of all closed subsets consisting of no more than  $n$  components. This space is good that it contains the hyperspace  $\exp_n(X)$  of closed sets consisting of no more than  $n$  elements and hyperspace of closed connected sets  $\exp^c(X)$ .

Let  $X$  be a topological  $T_1$ -space. The set of all non-empty closed subsets of a topological space  $X$  is denoted by  $\exp X$ . The family of all sets of the form

$$O\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ F : F \in \exp(X), F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

where  $U_1, \dots, U_n$  are open subsets of  $X$ , generates a base of the topology on the set  $\exp(X)$ . This topology is called the Vietoris topology. The set  $\exp(X)$  with the Vietoris topology is called exponential space or the hyperspace of a space  $X$  [3].

Put  $\exp_n(X) = \{ F \in \exp(X) : |F| \leq n \}$ ,  $\exp_o(X) = \bigcup \{ \exp_n(X) : n = 1, 2, \dots \}$ ,  $\exp^c(X) = \{ F \in \exp(X) : F \text{ is connected in } X \}$ .

It is clear that  $\exp^c(X) \subset C_n(X) \subset \exp(X)$  and  $\exp_n(X) \subset C_n(X)$  for any topological space  $X$ . On  $C_n(X)$  the topology induced from the hyperspace  $\exp(X)$  is considered.

Note that  $\exp_n(X) = C_n(X)$  for a discrete space  $X$ . When  $n=1$  we have  $\exp^c(X) = C_n(X)$ .

**Remark.** Let us consider the set  $F = [0,1] \cup [2,3]$  in the real line  $R$  with the natural topology. Then  $F \in C_n(R)$  for  $n \geq 2$ , but  $F \notin \exp_n(R)$  when  $n \geq 2$  as  $|F| = c > n$ .

Let  $X, Y \in \text{Comp}$  and let  $f : X \rightarrow Y$  be a continuous map between compacts  $X$  and  $Y$ . For any set  $F \in C_n(X)$  put

$$C_n(f)(F) = f(F).$$

Then  $C_n(f): C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  is a continuous map. Thus, the structure  $C_n$  forms a covariant functor in the category  $Comp$  of compacta.

Let  $S = \{X_\alpha : \pi_\alpha^\alpha\}$  be a continuous spectrum. Then  $C_n(S) = \{C_n(X_\alpha) : C_n(\pi_\alpha^\alpha)\}$  is also an inverse system. Denote its bonding maps by  $\pi_\alpha^\alpha$ .

A functor  $F$  is said to be continuous [3], if  $F(\lim S) = \lim F(S)$  for each inverse system  $S$ . Furthermore, this means that there exists a homeomorphism  $f : F(\lim S) \rightarrow \lim F(S)$ , for which

$$F(\pi_\alpha) = \pi_\alpha^F \circ f .$$

**Theorem.** The functor  $C_n : Comp \rightarrow Comp$  is continuous.

### References:

1. Javier Camargo, Sergiyo Macias. Quotients of n-fold hyperspaces // Topology and its Applications, 197 (2016), 154 - 166.
2. Sergiyo Macias, On n-fold hyperspaces of a continua // Glas. Mat. 44 (64) (2009), 479-492.
3. Fedorchuk V.V., Filippov V.V.. General topology. The basic constructions. Moscow, 2014
4. Beshimov R.B., Mamadaliev N. K., Eshtemirova Sh. Kh., Categorical and cardinal properties of hyperspaces with a finite number of components. Journal of mathematical sciences, Vol. 245, No 3, 2020, pp. 390-397.

## ON LOCAL DENSITY AND LOCAL WEAK DENSITY OF STRATIFIABLE SPACES

*Mamadaliev N.K.<sup>1</sup>, Ibragimova U.B.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky,*

<sup>2</sup>*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek*

*e-mail: [nodir\\_88@bk.ru](mailto:nodir_88@bk.ru)*

In the paper the local density and the local weak density of stratifiable spaces are investigated.

Recall some necessary definitions.

**Definition 1.[1]** The weak density of a topological space  $X$  is the smallest cardinal number  $\tau \geq \aleph_0$  such that there is a  $\pi$ -base in  $X$  coinciding with  $\tau$  centered systems of open sets, i.e. there is a  $\pi$ -base  $\mathcal{B} = \bigcup \{B_\alpha : \alpha \in A\}$ , where  $B_\alpha$  is a centered system of open sets for each  $\alpha \in A$  and  $|A| = \tau$ .

The weak density of a topological space  $X$  is denoted by  $wd(X)$ . If  $wd(X) = \aleph_0$  then we say that a topological space  $X$  is weakly separable.

**Definition 2.[2]** We say that a topological space  $X$  is locally separable at a point  $x \in X$  if  $x$  has a separable neighborhood.

A topological space is locally separable if it is locally separable at each point  $x \in X$ .

**Definition 3.** We say that a topological space  $X$  is locally  $\tau$ -dense at a point  $x \in X$  if  $\tau$  is the smallest cardinal number such that  $x$  has a  $\tau$ -dense neighborhood in  $X$ .

The local density at a point  $x$  is denoted by  $ld(x)$ .

The local density of a space  $X$  is defined as the supremum of all numbers  $ld(x)$  for  $x \in X$ ; this cardinal number is denoted by  $ld(X)$ .

A topological space is locally weakly  $\tau$  dense at a point  $x \in X$  if  $\tau$  is the smallest cardinal number such that  $x$  has a neighborhood of weak density  $\tau$  in  $X$ .

The local weak density at a point  $x$  is denoted by  $lwd(x)$ .

The local weak density of a topological space  $X$  is defined with following way:

$$lwd(X) = \sup \{ lwd(x) : x \in X \}.$$

**Definition 4.[4]** We say that  $T_1$ -topological space is stratifiable provided that to each open set  $U$  one can assign a sequence  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  of open subsets of  $X$  such that

- a)  $[U_n] \subset U$ ,
- b)  $\bigcup \{U_n : n \in \mathbb{N}\} = U$ ,

c)  $U_n \subseteq V_n$  whenever  $U \subseteq V$ .

The construction in the definition is called the stratification.

It is obvious that every metrizable space is stratifiable.

**Theorem 1.** For every stratifiable space  $X$  we have  $ld(X) = lwd(X)$ .

**Corollary 1.** A stratifiable space is locally separable if and only if it is locally weakly separable.

### References:

- [1]. Beshimov R.B., On weak density of topological spaces. DANRUz, 2000 No11, p. 10-13.
- [2]. Engelking R. General topology. Moscow: Mir, 1986, 752 p.
- [3]. Djabbarov G.F. Locally weakly separable spaces and the functor of weakly additive positively uniform functionals. Cand.diss. Tashkent, 2006, 87 p.
- [4]. Ceder J., Some generalizations of metric spaces, Pacific Journal of Mathematics, 1961, № 1, V 11, -P. 105-126.

## PARALLELEPIPEDDA BERILGAN PARAMETRGA BOG'LIQ BO'LGAN CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINING PARAMETRNING BARCHA QIYMATLARIDA YECHIMI MAVJUD YOKI MAVJUD EMASLIGINI ANIQLASHNING SODDA ALGORITMI

*Mamatov A.R, To'qsonova I.*

*Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti*

*akmm1964@rambler.ru*

$$X = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*\} \text{ va } Y(x) = \{y \mid g_* \leq y \leq g^*, Ax + By = b\}$$

to'plamlar berilgan bo'lsin.

Bu yerda  $x = x(J), f_* = f_*(J), f^* = f^*(J) - n$ -vektorlar;  
 $y = y(K), g_* = g_*(K), g^* = g^*(K) - \ell$ -vektorlar;  $b = b(I) - m$ -vektor;  
 $A = A(I, J), B = B(I, K)$  -mos ravishda  $m \times n$  va  $m \times \ell$  matritsalar;  $\text{rank} B = m < \ell$ ,  
 $I = \{1, 2, \dots, m\}, J = \{1, 2, \dots, n\}, K = \{1, 2, \dots, \ell\}$ .

$X$  top‘lamdan olingan ixtiyoriy  $x$  uchun unga mos keluvchi  $Y(x)$  to‘plamning bo‘sh yoki bo‘sh emasligini aniqlash masalasini qaraymiz.

Qaralayotgan masalaning birma-bir ko‘rib chiqish usuliga asoslangan algoritmlar keltiriladi. Birma-bir ko‘rib chiqish ob‘ekti sifatida  $B$  matritsaning barcha  $m \times m$  o‘lchamli qism osti matritsalar hamva  $X$  to‘plamning uchlari olinadi hamda chiziqli programmalashning ikkalanma nazariyasiga [1] asoslanadi.

Algoritmlar qaralayotgan masalaning parametrlari

$$f_* = (-5, -30, 0), \quad f^* = (3, 25, 40),$$

$$g'_* = (-109, -6, -101, -10, -3), \quad g'^* = (44, 6, 298, 10, 15)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b' = (4; 5)$$

bo‘lganda illyustratsiya qilinadi.

Adabiyot

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации.— Минск: «Четыре четверти», 2011. 472 с.

## CLASSIFICATION IN ONE OF THE CHAINS OF THREE-DIMENSIONAL REAL EVOLUTION ALGEBRAS

*Narkuziyev Bobomurad Abduvakilovich*

*Samarkand branch of Kimyo International University in Tashkent and*

*Samarkand State University. [bnarkuziev@yandex.ru](mailto:bnarkuziev@yandex.ru)*

Following [1] we consider a family  $\{E^{[s,t]} : s, t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t\}$  of  $n$ -dimensional evolution algebras over the field  $\mathbb{R}$ , with the basis  $e_1, e_2, \dots, e_n$  and the table of multiplication

$$e_i e_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{[s,t]} e_j, \quad i = 1, \dots, n; \quad e_i e_j = 0, \quad i \neq j,$$

here the parameters  $s, t$  are considered as time.

Denote by  $\mathcal{M}^{[s,t]} = (a_{ij}^{[s,t]})_{i,j=1,\dots,n}$  the matrix of structure constants of  $E^{[s,t]}$ .

**Definition.** A family  $\{E^{[s,t]} : s, t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t\}$  of  $n$ -dimensional evolution algebras over the field  $\mathbb{R}$ , is called a chain of evolution algebras (CEA) if the matrix  $\mathcal{M}^{[s,t]}$  of structure constants satisfies the Chapman-Kolmogorov equation

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \mathcal{M}^{[s,\tau]} \mathcal{M}^{[\tau,t]}, \text{ for any } s < \tau < t.$$

We consider the following known CEA (constructed in [3]):

$E_*^{[s,t]}$ , which correspond to the  $\mathcal{M}^{[s,t]}$  defined as:

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \frac{1}{2} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 + \psi(s) & 1 + \psi(s) & 1 + \psi(s) \\ 1 - \varphi(s) & 1 - \varphi(s) & 1 - \varphi(s) \\ \varphi(s) - \psi(s) & \varphi(s) - \psi(s) & \varphi(s) - \psi(s) \end{pmatrix}, & \text{if } s \leq t < a, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{if } t \geq a, \end{cases}$$

where  $a > 0$  and  $\varphi, \psi$  are arbitrary functions.

**Theorem 1. [2]** Any three-dimensional real evolution algebra  $E$  with  $\dim(E^2) = 1$  is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic

$$\begin{aligned} \text{algebras: } E_1: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, E_4: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ , E_5: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_7: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_8: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_9: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{10}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{11}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Theorem 2.** For given values  $(s,t) \in \{(s,t) : 0 \leq s \leq t < a\}$  of time the algebra  $E_*^{[s,t]}$  is isomorphic to

(a)  $E_4$  if one of the following conditions holds:

- $\psi(s) = \varphi(s) = 1$ ;
- $\psi(s) = \varphi(s) = -1$ ;
- $\psi(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ;

(b)  $E_5$  if one of the following conditions holds:

- $\psi(s) = -1, |\varphi(s)| < 1;$
- $\varphi(s) = 1, |\psi(s)| < 1;$
- $\psi(s) = \varphi(s), |\psi(s)| < 1;$

(c)  $E_6$  if one of the following conditions holds:

- $\psi(s) = -1, |\varphi(s)| > 1;$
- $\varphi(s) = 1, |\psi(s)| > 1;$
- $\psi(s) = \varphi(s), |\psi(s)| > 1;$

(d)  $E_7$  if the following condition holds:

- $(1 + \psi(s))(1 - \varphi(s))(\varphi(s) - \psi(s)) \neq 0,$   
 $(1 + \psi(s))(1 - \varphi(s))(2 + \psi(s) - \varphi(s)) > 0, (\varphi(s) - \psi(s))(2 + \psi(s) - \varphi(s)) > 0;$

(e)  $E_8$  if one of the following conditions holds:

- $(1 + \psi(s))(1 - \varphi(s))(\varphi(s) - \psi(s)) \neq 0,$
- $(1 + \psi(s))(1 - \varphi(s))(2 + \psi(s) - \varphi(s)) > 0, ;$   
 $(\varphi(s) - \psi(s))(2 + \psi(s) - \varphi(s)) < 0$
- $(1 + \psi(s))(1 - \varphi(s))(\varphi(s) - \psi(s)) \neq 0,$
- $(1 + \psi(s))(1 - \varphi(s))(2 + \psi(s) - \varphi(s)) < 0, ;$   
 $(\varphi(s) - \psi(s))(2 + \psi(s) - \varphi(s)) > 0$
- $(1 + \psi(s))(1 - \varphi(s))(\varphi(s) - \psi(s)) \neq 0, 2 + \psi(s) - \varphi(s) = 0;$

(f)  $E_9$  if the following condition holds:

- $(1 + \psi(s))(1 - \varphi(s))(\varphi(s) - \psi(s)) \neq 0,$
- $(1 + \psi(s))(1 - \varphi(s))(2 + \psi(s) - \varphi(s)) < 0,$   
 $(\varphi(s) - \psi(s))(2 + \psi(s) - \varphi(s)) < 0.$

For all  $(s, t) \in \{(s, t) : t \geq a\}$  the algebra  $E_*^{[s, t]}$  is isomorphic to  $E_0$ .

### References:

1. J.M. Casas, M. Ladra, U.A. Rozikov, *A chain of evolution algebras*, Linear Algebra Appl., **435**(04), (2011), 852-870.
2. A.N. Imomkulov, *Classification of a family of three dimensional real evolution algebras*, TWMS J. Pure Appl. Math., **10**(2), (2019), 225-238.

3. A.N. Imomkulov, M.V. Velasco, *Chain of three-dimensional evolution algebras*, Filomat, **34**(10), (2020), 3175-3190.

4. B.A. Narkuziyev, U.A. Rozikov, *Classification in chains of three-dimensional real evolution algebras*, Linear and Multilinear Algebra, **71**(2), (2023), 265-300.

## GAMILTON SISTEMALARINING GAMILTON SIMMETRIYALARI

*Parmonov Hamid Faxriddin o'g'li*

*Buxoro davlat universiteti o'qituvchisi*

*hparmonov93@mail.ru*

Bizga  $H$  funksiyaga mos keluvchi **Gamilton sistemasining ko`rinishi berilgan bo`lsin**

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\nabla H(x). \quad (1)$$

**Ta`rif.1.** Berilgan  $P(x,t)$  funksiya yuqoridagi (1) gamilton sistemaning birinchi integrali deyiladi, agar bu sistemasining ixtiyoriy  $x(t)$  yechimi uchun  $P(x(t),t) = \text{const}$  tenglik o`rinli bo`lsa.

**Ta`rif.2.** Agar gruppaning yasovchisi Gamilton vektor maydon bo`lsa, u holda bu vektor maydon gamilton sistemasining Gamilton simmetriyasi bo`ladi.

**Teorema.1.** Berilgan  $W$  vektor maydon gamilton sistemasining gamilton simmetriya gruppasini hosil qiladi, faqat va faqat  $P(x,t)$  funksiya mavjud bo`lib, u uning birinchi integral bo`lsa.

Bu yerda  $W = v_p$  vektor maydon  $P$  funksiyaga mos keluvchi gamilton vektor maydon.

Ushbu teoremadan foydalanib biz quyidagi teoremani isbotlaymiz.

**Teorema.2.** Bizga vaqtga bog`liq bo`lmagan (1) sistema va  $V_p$  – gamilton simmetriyasi berilgan bo`lsin ( $P$ –funksiya vaqtga bog`liq emas), u holda (1) sistemaning har bir  $x(t)$  yechimi uchun  $P(x(t)) = at + b$  tenglik o`rinli bo`ladi. Bu yerda  $a, b$ –o`zgarmas sonlar.

**Isbot.** Agar  $P$  funksiya birinchi integral funksiya bo`lsa u holda (1) sistemaning har bir  $x(t)$  yechimi uchun  $P(x(t)) = b = const$  tenglik barcha  $t$  uchun o`rinli bo`ladi.

Boshqa tarafdin  $V_p$  vektor maydoni gamilton simmetriyasi hisoblanadi faqat va faqat agar

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \{P, H\} = C(t)$$

kommutator uchun “nol” funksiya bo`lsa.

$P$  funksiya  $t$  ga bog`liq bo`lmaganligidan biz  $\{P, H\} = C(t) = a$  o`zgarmas funksiya bo`lishiga ega bo`lamiz.

Biz

$$G = \int_0^t \{P, H\} dt = at + b$$

belgilash kiritib ,  $\frac{dG}{dt} = \{G, H\} = a$  tenglikni hosil qilamiz. Endi biz  $P_0 = P - G$

funksiya birinchi integral bo`lishini tekshiramiz:

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \{P_0, H\} = -\frac{\partial G}{\partial t} + \{P, H\} = 0.$$

Shunday qilib, (1) sistemasining har bir  $x(t)$  yechimi uchun barcha  $t$  larda  $P(x(t)) = at + b = const$  o`rinli bo`ladi.

### ADABIYOTLAR:

1. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1989г.
2. Пармонов Х “гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы симметрии”Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики, Республиканской научной конференции, УзМУ, 30 арпеля - 1 мая, Ташкент2019.
3. Пармонов Х .О симметрии гамильтоновых систем.Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. Москва. 2018,7(июль), стр.9-12.

## О ГЕОМЕТРИИ СИНГУЛЯРНЫХ РИМАНОВЫХ СЛОЕНИЙ В $R^3$

<sup>1</sup>О. Ю. Касимов, <sup>2</sup>Сатторов И. И

<sup>1,2</sup>Денауский институт предпринимательства и педагогики, Узбекистан.

E-mail: odilbek.qosimov84@mail.ru

Пусть  $M$  – гладкое многообразие размерности  $n$ ,  $D$  – семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии  $M$ . Семейство  $D$  может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

**Определение 1.[2]** Орбита  $L(x)$  семейства  $D$  векторных полей, проходящая через точку  $x$  из  $M$ , определяется как множество таких точек  $y$  из  $M$ , для которых существуют действительные числа  $t_1, t_2, \dots, t_k$  и векторные поля  $X_1, X_2, \dots, X_k$  из  $D$  (где  $k$  произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k} (X_{k-1}^{t_{k-1}} (\dots (X_1^{t_1} (x)) \dots))$$

**Пример 1.** Пусть семейство  $D = \{X, Y\}$  гладких векторных полей в  $R^3$ , где

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Потоки векторных полей  $X, Y$  состоит из следующих преобразований:

$$X^t : (x, y, z) \rightarrow \{xcht + ysht, xsht + ycht, z\}, t \in R,$$

$$Y^s : (x, y, z) \rightarrow \{xe^s, ye^s, ze^{2s}\}, s \in R.$$

Для этих векторных полей скобка Ли имеет следующий вид:  $[X, Y] = 0$ . Орбита семейства векторных полей  $D$  состоит из частей гиперболических параболоидов. Эти части гиперболических параболоидов в месте с координатной плоскостью  $z = 0$  и с осью  $Oz$  покрывают все пространство  $R^3$ .

Пусть  $M$  – гладкое многообразие размерности  $n$ ,  $A$  – максимальный атлас, определяющий на  $M$  структуру гладкого многообразия класса  $C^r$ , где  $r \geq 0$ . Многообразие  $M$  является также многообразием класса  $C^s$ , если  $0 \leq s \leq r$ . Систему локальных криволинейных координат на  $C^s$  многообразии

$M$  обозначим через  $A^s$ . Пусть теперь целое  $k$  удовлетворяет неравенствам  $0 < k < n$ .

**Определение 2.** Разбиение  $F$  многообразия  $M$  на подмногообразия  $L_\alpha$  называется сингулярным слоением, если выполнены следующие условия:

- 1)  $\bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M$ ;
- 2) Для всех  $\alpha, \beta \in B$  имеет место обязательно  $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$  при  $\alpha \neq \beta$ ;
- 3) Каноническая инъекция  $i: L_\alpha \rightarrow M$  является погружением;
- 4) Для каждой точки  $x \in M$  существует  $C^r$  – карта  $(\varphi, U)$ , содержащая точку  $x$  такая, что  $\varphi(U) = V_1 \times V_2$ , где  $V_1$  – окрестность начала в  $R^k$ ,  $V_2$  – окрестность начала в  $R^{n-k}$ ,  $k$  – есть размерность слоя, проходящего через точку  $x$ ;
- 5)  $\varphi(x) = (0, 0)$ ;
- 6) Для каждого подмногообразия  $L_\alpha$  такого, что  $L_\alpha \cap U \neq \emptyset$ , имеет место равенство  $L_\alpha \cap U = \varphi^{-1}(V_1 \times l)$ , где  $l = \{v \in V_2 : \varphi^{-1}(0, v) \in L_\alpha\}$ .

Подмногообразия  $L_\alpha$  называются слоями сингулярного слоения  $F$ . Если размерность слоев сингулярного слоения одинаковы, то слоение называется регулярным слоением. Слой  $L$  слоения  $F$  называется регулярным, если размерность слоя  $L$  максимален. Слой  $L$  слоения  $F$  называется сингулярным, если он не является регулярным.

**Определение 3.[4]** Сингулярное слоение  $F$  называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой точке слою, слоения  $F$  остается ортогональна всем слоям  $F$  во всех точки.

Пусть  $D = \{X, Y\}$  семейство гладких векторных полей в  $R^3$ , где

$$X = \{z; 0; -x\}, Y = \{-y; x; 0\}.$$

Поток векторного поля  $X, Y$  порождает следующую однопараметрическую группу преобразований

$$X^\xi : (x, y, z) \rightarrow \{x \cos \xi - z \sin \xi, y, x \sin \xi + z \cos \xi\}, \xi \in R.$$

$$Y^\zeta : (x, y, z) \rightarrow \{x \cos \zeta - y \sin \zeta, x \sin \zeta + y \cos \zeta, z\}, \zeta \in R.$$

Для этих семейств векторных полей  $D = \{X, Y\}$  справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Орбиты семейство векторных полей  $D = \{X, Y\}$  порождают сингулярное риманова слоение  $F$ , пространства  $R^3$ , регулярными слоями которого являются концентрические сферы. Сингулярными слоем слоения  $F$  являются одна точка т. е. начало координат.

#### Литературы:

1. Нарманов А.Я., Касимов О. Геометрия сингулярных римановых слоений// Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2011. N-3. -с. 129-135.
2. Olver P. Application of Lie Groups to Differential Equations. Second edition. // Springer 1993.
3. Tondeur Ph. Geometry of foliations. Monographs in Mathematics, Vol. 90, Birkhaeuser Verlag, Basel, 1997, P. 305.
4. Tamura I. Topology of foliations: an introduction. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Soc., 2006.

## VALUATION OF THE CONDITIONAL FULL ANGLE OF $n$ HEDRAL ANGLE.

*Topvoldiyev F.F.*

*Fergana state university, Fergana, Uzbekistan*

[ftopvoldiev87@mail.ru](mailto:ftopvoldiev87@mail.ru)

In classical differential geometry, two directions are distinguished. One of them, called local geometry, studies the local properties of geometric objects, and the second one examines geometric objects throughout their entire length and is called global geometry.

In many problems of global geometry, related to the multidimensional case, a certain approach is distinguished, which turns out to be fruitful in solving such problems [1],[2].

Now let's estimate the conditional total angle  $n$  of the facet angle for the case when one of its edges is perpendicular to the vector  $\vec{e}(OX)$ .

Consider a  $n$  facet angle  $S_n$ , whose vertex is at the origin of coordinates and with edges  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, c$ , which are uniquely projected onto the plane  $XOY$ , without edges and the supporting planes are perpendicular to vector  $\vec{e}$ .

Let plane  $x = -1$  intersect edges  $a_0$  at points  $A'$ , plane  $x = 1$  intersect edges  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, c$  at points  $A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, C_1$  correspondently. We will mapping point  $A'$  symmetrically with respect to the origin of coordinates and denote the resulting point by  $A$ . This leads to non-convex figure  $AA_1A_2, \dots, A_{n-2}C_1$ .

The defect of this polygon with respect to the angle  $A$  is found by the following formula [3]:

$$\omega_{AA_1A_2 \dots A_{n-2}C_1}(A) = AA_1 + AC_1 - P_{A_1A_2 \dots A_{n-2}C_1}. \quad (1)$$

Where  $P_{A_1A_2 \dots A_{n-2}C_1}$  is the perimeter of the broken  $A_1A_2 \dots A_{n-2}C_1$ .

The value  $\omega_{AA_1A_2 \dots A_{n-2}C_1}(A)$  is called the conditional total angle  $S_n$  [3].

On the plane  $x = 1$  we will introduce a rectangular coordinate system  $(u; v)$  so that the point  $A$  coincides with the origin, let the axis  $Av$  intersect the broken  $A_1A_2 \dots A_{n-2}C_1$  at the point  $A_k$ .

By shifting the vertice  $n$  of the facet angle  $S_n$  along the axis  $OX$  to such a point that one of the edges  $S_n$  is perpendicular to vector  $\vec{e}(OX)$ . In this case, the coordinate system and the planes  $x = -1$  and  $x = 1$  are parallel shifted. But at the same time, while maintaining a uniquely projected of  $S_n$  onto the plane  $XOY$ . Without loss of generality, we can assume that the edge  $a_n$  is perpendicular to vector  $\vec{e}$ . Upon transition to this state, point  $C_1$  draws a curve on the plane  $x = 1$ , let's denote this curve by  $\gamma_1$ . And when the edge  $a_n$  becomes perpendicular to vector  $\vec{e}$ , the line passing through the point and parallel to the edge  $a_n$  becomes an

asymptote of this curve. Let us denote this asymptote by  $l$ . Let line  $l$  intersect  $AA_k$  at  $O'$  and  $AA_1$  at  $O^*$ .

Let point  $C$  be the point of approximation of curve  $\gamma_1$  to the asymptote. If edge  $a_n$  intersects planes  $x = -1$ , then points  $C$  are transformed into points  $C^*$ . In this case point  $C^*$  is a point of approximation asymptote of curve  $\gamma_2$  starting from point  $A_{n+1}$ . The line  $l$  is also an asymptote of the curve  $\gamma_2$ .

Curve  $\gamma_1$  and broken  $CO^*A_1A_2 \dots A_k \dots A_{n-2}C_1$  and curve  $\gamma_2$  and broken  $AO^*C^*$  form figures  $O^*A_1A_2 \dots A_{n-2}C_1C$  and  $O^*AC^*$  with a common vertex, correspondently. The defects of these figures are calculated relative to the angle  $O^*$ . When edge  $c$  is perpendicular to vector  $\vec{e}$  at the same time  $C$  and  $C^*$  tend to the limit  $+\infty$  and  $-\infty$  correspondently.

Denote by  $S_n$   $n$  the facet angle with the edge  $c$  perpendicular to vector  $\vec{e}$ . Let its conditional total angle be  $\omega_{S_n}$ .

Then

$$\omega_{S_n} = \omega_1 + \omega_2. \tag{2}$$

When  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are equal to the defects of the figures  $O^*A_1A_2 \dots A_{n-2}C_1C$  and  $O^*AC^*$  when  $C \rightarrow \infty$  and  $C^* \rightarrow -\infty$  correspondently, i.e.

**Theorem.** Expression the conditional full angle  $n$  of the facet angle  $S_n$  is limited when one of its edge is perpendicular to vector  $\vec{e}(OX)$ .

#### Literature

1. Alexandrov A. D. Intrinsic geometry of convex surfaces. M-L. OGIZ, 1948.
2. Artykbaev A., Sokolov D. D. Geometry as a whole in flat space-time. Tashkent, FAN, 1990.
3. Sharipov A. S., Topvoldiyev F. F. On invariants of surfaces with isometric on sections. Mathematics and Statistics 10(3): 523-528, 2022.

## BIR DINAMIK SISTEMANING GEOMETRIYASI HAQIDA

*Tursunov B.A., Bozorov M.A.*

*Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O'zbekiston*

[bakbarovich@gmail.com](mailto:bakbarovich@gmail.com), [bozorovmurodulla2@gmail.com](mailto:bozorovmurodulla2@gmail.com)

Differensiallanuvchi akslantirish  $f:U \rightarrow R^m$  ning rangi hamma nuqtalarda maksimal bo'lib,  $n > m$  bo'lsa  $f$  akslantirishga submersiya deyiladi, bunda  $U - R^n$  dagi ochiq soha. Agar  $f$  submersiya bo'lsa, u holda har  $p \in R^m$  nuqtaning to'la proobrazi  $R^n$  da  $k = n - m$  o'lchamli ko'pxillikni (qatlamni) hosil qiladi.

Masalan,  $f:R^2 \rightarrow R^1:(x,y) \rightarrow x^2 - y$  submersiyada har bir  $(c) \in R^1$  nuqtaning to'la proobrazi  $R^2$  da  $y = x^2 + c$  tenglama bilan berilgan bir o'lchamli ko'pxillik - paraboladan iborat.

Bizga  $S$  sirtida yoki  $R^3$  fazoda  $X$  silliq vektor maydon (dinamik sistema):

$$\begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y, z), \\ \dot{y} = X_2(x, y, z), \\ \dot{z} = X_3(x, y, z) \end{cases}$$

berilgan bo'lsin. Agar  $\varphi:(a,b) \rightarrow R^3$  (yoki  $\varphi:(a,b) \rightarrow S$ ) silliq egri chiziq uchun

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t))$$

munosabat har bir  $t \in (a,b)$  uchun o'rinli bo'lsa, ya'ni  $\varphi$  chiziqning har bir  $t$  nuqtasidagi  $\varphi'(t)$  urinma vektori vektor maydon  $X$  ning shu  $p = \varphi(t)$  nuqtadagi vektori  $X(p)$  ga teng bo'lsa, u holda  $\varphi$  egri chiziq  $X$  vektor maydon uchun integral chiziq, yoki  $X$  vektor maydonning  $p$  nuqtadan o'tuvchi ortasi deyiladi.

Misol uchun,  $R^2(x, y)$  fazoda  $X_1 = \{1, 2x\}$  vektor maydonning  $p = (0, y_0)$  nuqtadan o'tuvchi orbitasi  $\varphi = \{(x, y) : y = x^2 + y_0\}$ ,  $t \in R$  nuqtalar to'plamidan, ya'ni paraboladan iborat. Bu vektor maydon maxsus nuqtaga ega emas.

Ushbu ishda vektor maydon hosil qilgan bir dinamik sistemaning geometriyasini o'rganamiz.

Bizga  $x, y, z$  dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan  $R^3$  fazoda

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay - \frac{xz}{b + \sqrt{1-z^2}}, \\ \dot{y} = ax - \frac{yz}{b + \sqrt{1-z^2}}, \\ \dot{z} = \sqrt{1-z^2} \end{cases} \quad (1)$$

dinamik sistema berilgan bo'lsin, bunda  $a > 0$ ,  $b > 0$  – berilgan o'zgarmas sonlar.  $\{(x, y, z) : x(t) = y(t) = 0, z(t) = 1\}$  to'plam muvozanat nuqtalardan iborat bo'lishini tekshirish qiyin emas.

**Teorema.** (1) dinamik sistemaning  $p(x_0, y_0, z_0) \in R^3$  nuqtadan o'tuvchi integral chizig'i  $a \in Q$  bo'lsa, aylanaga gomeomorf chiziqdan,  $a \in I = R \setminus Q$  bo'lsa, to'g'ri chiziqqa gomeomorf silliq chiziqdan iborat bo'ladi.

Agar (1) dinamik sistemada  $\dot{z} = 0$ , ya'ni  $z = z_0 = const$ ,  $z_0 \in (0, 1)$  bo'lsa, u holda integral chiziq  $z - z_0 = 0$  tekislikda yotuvchi spiraldan iborat.

Agar  $f(p) = 2b$  bo'lsa, u holda  $p$  nuqtadan o'tuvchi orbita

$$f : R^3 \rightarrow R^1 : (x, y, z) \rightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

submersiya hosil qilgan qatlamda (torda) yotadi.

### Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. Detlef Cromoll, Gerard Walschap. Metric foliations and curvature. Basel-Boston-Berlin. 2009.

2. Tursunov B.A. On the geometry of riemannian submersions over orbit of killing vector fields. Bulletin of mathematics and statistics research. Vol.4. Issue.2. 2016. India 102-107
3. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Введение в риманову геометрию. СПб.: Наука, 1994. 318стр.
4. Катанаев М.О. Геометрические методы в математической физике. Москва, Наука,2013.

## LOCAL DERIVATIONS OF FILIFORM ZINBIEL ALGEBRAS

*Umrzaqov Sardorbek Muhammedovich*

*Andijan State University, Andijon, Uzbekistan*

*sardor.umrzaqov1986@gmail.com*

In the present work derivations, local derivations of  $n$ -dimensional filiform Zinbiel algebras are studied. Namely, a common form of the matrix of derivations and local derivations of these algebras is clarified. It turns out that the common form of the matrix of a derivation on these algebras does not coincide with the local derivation's matrices common form on these algebras. Therefore, these Zinbiel algebras have local derivations that are not derivations.

**Theorem[2].** *An arbitrary  $n - dimensional n \geq 5$  filiform Zinbiel algebra is isomorphic to one of the following pairwise non - isomorphic algebras:*

$$F_n^1: e_i e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i + j \leq n - 1,$$

$$F_n^2: e_i e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i + j \leq n - 1, e_n e_1 = e_{n-1},$$

$$F_n^3: e_i e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i + j \leq n - 1, e_n e_n = e_{n-1}.$$

**Proposition.** *A linear map  $\Delta: F_n^1 \rightarrow F_n^1$  is a derivation if and only if  $\Delta$  is of the following form:*

$$\Delta(e_1) = \sum_{j=1}^n a_j e_j,$$

$$\Delta(e_i) = \sum_{j=i}^{n-1} C_j^{i-1} a_{j-i+1} e_j, \quad 2 \leq i \leq n - 1.$$

$$\Delta(e_n) = b_{n-1} e_{n-1} + b_n e_n.$$

**Proposition.** A linear map  $\Delta: F_n^2 \rightarrow F_n^2$  is a derivation if and only if  $\Delta$  is of the following form:

$$\begin{aligned}\Delta(e_1) &= \sum_{j=1}^n a_j e_j, \\ \Delta(e_2) &= \sum_{j=2}^{n-1} C_j^1 a_{j-1} e_j + a_n e_{n-1}, \\ \Delta(e_i) &= \sum_{j=i}^{n-1} C_j^{i-1} a_{j-i+1} e_j, \quad 3 \leq i \leq n-1. \\ \Delta(e_n) &= b_{n-1} e_{n-1} + (n-2)a_1 e_n.\end{aligned}$$

**Proposition.** A linear map  $\Delta: F_n^3 \rightarrow F_n^3$  is a derivation if and only if  $\Delta$  is of the following form:

$$\begin{aligned}\Delta(e_1) &= \sum_{j=1}^n a_j e_j, \\ \Delta(e_i) &= \sum_{j=i}^{n-1} C_j^{i-1} a_{j-i+1} e_j, \quad 2 \leq i \leq n-1. \\ \Delta(e_n) &= -a_n e_{n-2} + b_{n-1} e_{n-1} + \frac{n-1}{2} a_1 e_n.\end{aligned}$$

**Theorem.** A linear map  $\nabla$  on  $F_n^1$  and  $F_n^2$  are a local derivation if and only if the matrix of  $\nabla$  is of the following form

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ b_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

**Theorem.** A linear map  $\nabla$  on  $F_n^3$  is a local derivation if and only if the matrix of  $\nabla$  is of the following form

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2,1} & b_{n-2,2} & b_{n-2,3} & \dots & 0 & b_{n-2,n} \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ b_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

**References:**

1. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. *Linear Algebra and its Applications*. 493 (2016), p. 381–398.
2. Luisa M. Camacho, Karimjanov I., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., Central extensions of filiform Zinbiel algebras, *Linear and Multilinear Algebra*. 2020; DOI: 10.1080/03081087.2020.1764903.
3. Yusupov B.B., Local and 2-local derivations of some solvable Leibniz algebras, *Uzbek Mathematical Journal*, (2019), no. 2, 154-166. DOI: 10.29229/uzmj.2019-2-17.

## MAXIMAL SOLVABLE EXTENSIONS OF LOW DIMENSIONAL HEISENBERG LIE ALGEBRAS

*Urazmatov Gulmurod Khasanboy o'g'li*

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

*e-mail: [gulmurodurazmatov040599@gmail.com](mailto:gulmurodurazmatov040599@gmail.com)*

In this thesis we consider maximal solvable extensions of low dimensional Heisenberg Lie algebras.

**Definition 1.** A vector space with a bilinear bracket  $(L, [-, -])$  over a field  $\mathbb{F}$  is called a Lie algebra if for any  $x, y, z \in L$  the following identities hold:

$$[x, y] = -[y, x],$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

For a given Lie algebra  $(L, [-, -])$  the lower central and the derived series are defined recursively as follows

$$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L], k \geq 1, \quad L^{[1]} = L, L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}], s \geq 1.$$

**Definition 2.** An algebra  $L$  is said to be solvable (respectively, nilpotent) if there exists  $s \in \mathbb{N}$  (respectively,  $m \in \mathbb{N}$ ) such that  $L^s = 0$  ( $L^{[m]} = 0$ ).

**Definition 3.** A linear map  $d: L \rightarrow L$  of a Lie algebra  $(L, [-, -])$  is said to be a derivation if for all  $x, y \in L$  the following condition holds:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

The set of all derivations of  $L$  is denoted by  $\text{Der}(G)$ . The set  $\text{Der}(G)$  is a Lie algebra with respect to the commutator.

Let us consider  $(2k + 1)$ -dimensional Heisenberg Lie algebra  $L$  on the basis elements  $\{x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k\}$  with the multiplication:

$$[x_i, y_i] = z, \quad 1 \leq i \leq k.$$

In this work we consider  $k = 1$  and  $k = 2$  case,

then we have 3- and 5- dimensional Heisenberg algebras with the following multiplications :

$$H_3 : [e_1, e_2] = e_3, \quad H_5 : [e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = e_5.$$

**Proposition 1.** Any derivations of the algebra  $H_3$  and  $H_5$  have the following matrix form respectively:

$$\text{Der}(H_3) : \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{11} + \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{Der}(H_5) : \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} & \beta_{25} \\ -\beta_{24} & \beta_{14} & \beta_{33} & \beta_{34} & \beta_{35} \\ \beta_{23} & -\beta_{13} & \beta_{43} & \beta_{44} & \beta_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

here  $d = \beta_{11} + \beta_{22} = \beta_{33} + \beta_{44}$ .

Suppose,  $R(H_3) = H_3 \oplus Q_1$  and  $R(H_5) = H_5 \oplus Q_2$  be solvable Lie algebras with  $H_3$  and  $H_5$  as nilradical. Here,  $Q_1$  and  $Q_2$  are the complementary subspaces  $H_3$  of and  $H_5$ . By using nil-independent derivations of  $H_3$  and  $H_5$ , we get the following lemma:

**Lemma 2.**  $\text{Codim } H_3 \leq 2$  and  $\text{codim } H_5 \leq 3$ .

Obviously, it's easy to derive  $R(H_3)$  by nil-independent derivations, but for  $R(H_5)$  this method is not effective. Let  $I = \{e_5\}$ , because of  $I$  is an ideal of  $H_5$ , we can consider the factor algebra  $\{H_5 / I\}$ . We have 4-dimensional abelian algebra  $\{H_5 / I\}$  as nilradical and 3-dimensional it's complementary subspace  $Q_2$ . Then we come to an algebra  $L_7(\beta_i)$  which is mentioned in [1]. After some computations, we get the following result:

**Theorem 1.** Any maximal solvable extensions of the algebras  $H_3$  and  $H_5$  have the following multiplication tables respectively:

$$R(H_3): \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_1, x_1] = e_1, \\ [e_3, x_1] = e_3, \\ [e_2, x_2] = e_2, \\ [e_3, x_2] = e_3, \end{cases} \quad R(H_5): \begin{cases} [e_1, e_2] = e_5 \\ [e_3, e_4] = e_5 \\ [e_1, x_1] = e_1 \\ [e_4, x_1] = e_4 \\ [e_5, x_1] = e_5 \\ [e_2, x_2] = e_2 \\ [e_4, x_2] = e_4 \\ [e_5, x_2] = e_5 \\ [e_3, x_3] = e_3 \\ [e_4, x_3] = -e_4 \end{cases}$$

and the remaining products of the basis elements are zero.

### References:

1. Gaybullayev. R.K, Khudoyberdiyev A.Kh, Pohl K, "Classification of solvable leibniz algebras with abelian nilradical and  $k-1$  dimensional extension", Communications in Algebra, 2020, 48, 7, P. 3061.

## DERIVATIONS OF SEMISIMPLE LEIBNIZ ALGEBRAS

*I.G'.Yuldashev*

*Department of Mathematics Nukus state pedagogical institute*

*i.yuldashev1990@mail.ru*

The study of local derivations started with Kadison's article [9]. After this work, appear numerous new results related to the description of numerous local mappings (such that local derivations, 2-local derivations, bilocal derivations, bilocal Lie derivations, weak-2-local derivations, local automorphisms, 2-local Lie \*-automorphisms, 2-local \*-Lie isomorphisms and so on) of associative algebras. The study of local and 2-local derivations of non-associative algebras was initiated in some papers of Ayupov and Kudaybergenov (for the case of Lie

algebras, see [2,3]). In particular, they proved that there are no non-trivial local and 2-local derivations on complex semisimple finite-dimensional Lie algebras. In [4] it is also given examples of 2-local derivations on nilpotent Lie algebras which are not derivations. After the cited works, the study of local and 2-local derivations was continued for many types of algebras, such that Leibniz algebras [6], algebras Cayley algebras[1],  $n$ -ary algebras [8] and so on.

*Let  $A$  be an algebra. A linear map  $\Delta: A \rightarrow A$  is called a local derivation, if for any element  $x \in A$  there exists a derivation  $\mathfrak{D}_x: A \rightarrow A$  such that  $\Delta(x) = \mathfrak{D}_x(x)$*

An algebra  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$  over a field  $\mathbb{F}$  is called a (right) Leibniz algebra if it satisfies the property

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

which is called Leibniz identity. For a Leibniz algebra  $\mathcal{L}$ , a subspace generated by its squares  $\mathcal{I} = \text{span}\{[x, x]: x \in \mathcal{L}\}$  due to Leibniz identity becomes an ideal, and the quotient  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L} / \mathcal{I}$  is a Lie algebra called liezation of  $\mathcal{L}$ . Moreover,  $[\mathcal{L}, \mathcal{I}] = 0$ . A Leibniz algebra  $\mathcal{L}$  is called simple if its liezation is a simple Lie algebra and the ideal  $\mathcal{I}$  is a simple ideal. Equivalently,  $\mathcal{L}$  is simple iff  $\mathcal{I}$  is the only non-trivial ideal of  $\mathcal{L}$ . A Leibniz algebra  $\mathcal{L}$  is called semisimple if its liezation  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  is a semisimple Lie algebra. Simple and semisimple Leibniz algebras are under certain interest now [6,7,10,11].

Let  $\mathcal{G}$  be a Lie algebra and  $\mathcal{V}$  a (right)  $\mathcal{G}$ -module. Endow on vector space  $\mathcal{L} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{V}$  the bracket product as follows:

$$[(g_1, v_1), (g_2, v_2)] := ([g_1, g_2], v_1 \cdot g_2),$$

where  $v \cdot g$  (sometimes denoted as  $[v, g]$ ) is an action of an element  $g$  of  $\mathcal{G}$  on  $v \in \mathcal{V}$ . Then  $\mathcal{L}$  is a Leibniz algebra, denoted as  $\mathcal{G} \ltimes \mathcal{V}$ .

### References:

1. Ayupov Sh. A., Elduque A., Kudaybergenov K. K., Local and 2-local derivations of Cayley algebras, arXiv:2105.08423
2. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Local derivations on finite-

- dimensional Lie algebras, *Linear Algebra and Its Applications*, 493 (2016), 381–398.
3. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., 2-Local automorphisms on finite-dimensional Lie algebras, *Linear Algebra and Its Applications*, 507 (2016), 121–131.
  4. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Rakhimov I., 2-local derivations on finite dimensional Lie algebras, *Linear Algebra Appl.*, 474 (2015) 1–11.
  5. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Omirov B. A., Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43 (2020), 3, 2199–2234.
  6. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Omirov B. A., Zhao K., Semisimple Leibniz algebras, their derivations and automorphisms, *Linear and Multilinear Algebra*, 68 (2020), 10, 2005–2019.
  7. Loday J.-L., Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, *L'Enseignement Mathématique*, 39 (1993), 3-4, 269–293.
  8. Ferreira B., Kaygorodov I., Kudaybergenov K., Local and 2-local derivations of simple  $n$ -ary algebras, *Ricerche di Matematica*, 2021, DOI: 10.1007/s11587-021-00602-3
  9. Kadison R.V., Local derivations, *Journal of Algebra*, 130 (1990), 2, 494–509.
  10. Mugniery J., Wagemann F., Ext groups in the category of bimodules over a simple Leibniz algebra, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 225 (2021), 6, Paper No. 106637.
  11. Rakhimov I. S., Masutova K. K., Omirov B. A., On derivations of semisimple Leibniz algebras, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 40 (2017), 1, 295–306.

**$R^n$  FAZODA SHUNDAY IKKITA  $X$  VA  $Y$  KILLING VEKTOR  
MAYDAONLARDAN TUZILGAN  $D = \{X, Y\}$  OILANING ORBITASI**

<sup>1</sup>*Yusufjonov N. E.*, <sup>2</sup>*Mirzaraximov M. M.*

<sup>1</sup>*Namangan Muhandislik-Qurilish Instituti o'qituvchisi*

<sup>2</sup>*Namangan Muhandislik-Qurilish Instituti talabasi*

[<sup>1</sup>nuriddinyusufjonov1995@mail.ru](mailto:nuriddinyusufjonov1995@mail.ru)

<sup>2</sup>*boburrahimov0818@gmail.com*

**Tarif 1.** Berilgan  $M$  silliq ko'pxillikning  $A$  qism to'plamida  $X$  vektor maydon berilgan deyiladi, agar har bir  $x \in A$  nuqtaga biror  $X_x \in T_x M$  vektor mos qo'yilgan bo'lsa, ya'ni vektor maydonni  $X : A \rightarrow TM$  akslantirish sifatida qarash mumkin bo'lsa.

Endi  $G \subset M$  sohada aniqlangan ixtiyoriy ikkita  $X, Y$  vektor maydon va  $x \in G$  nuqtaga quyidagi  $[X, Y]_x f = X_x(Yf) - Y_x(Xf)$  qoida bilan aniqlanuvchi  $[X, Y]_x$  funksionalni mos qo'yamiz, bu erda  $f$  silliq funksiya va  $Yf, Xf$  lar  $f$  funksiyadan yo'nalish bo'yicha hosilalar.

Faraz qilaylik  $X, Y$  vektor maydonlarning  $\partial_1, \dots, \partial_n$  bazisdagi yoyilmalari  $X = \sum_i X^i \partial_i$ ,  $Y = \sum_j Y^j \partial_j$  bo'lsin.

$$\begin{aligned} \text{U holda } [X, Y]_x f &= X_x \left( \sum_i Y^i \partial_i f \right) - Y_x \left( \sum_i X^i \partial_i f \right) = \\ &= \sum_{i,j} X_x^j (\partial_j Y^i) \partial_i f + \sum_{i,j} X_x^j Y_x^i \partial_j \partial_i f - \sum_{i,j} Y_x^j (\partial_j X^i) \partial_i f - \sum_{i,j} Y_x^j X_x^i \partial_j \partial_i f = \\ &= \sum_{i,j} (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i)_x \partial_i f \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdan  $[X, Y]_x$  vektorning  $x^1, \dots, x^n$  lokal koordinatalardagi va  $\partial_1, \dots, \partial_n$  bazisdagi koordinatalarini yozamiz:

$$[X, Y]_x^i = \left( \sum_j X^j \partial_j Y^i - \sum_j Y^j \partial_j X^i \right)_x = \left( \sum_j X^j \frac{\partial \bar{Y}^i}{\partial x^j} - \sum_j Y^j \frac{\partial \bar{X}^i}{\partial x^j} \right)_x. \quad (6)$$

Shunday qilib  $M$  ko'pxillikdagi har bir  $X, Y$  silliq vektor maydonlar juftligiga yangi  $[X, Y]$  vektor maydon mos keladi va  $X, Y$  vektor maydonlarning Li kommutatori (qavsi) deyiladi.

$X$  va  $Y$  -  $M$  dagi vektor maydonlar bo'lsa, u holda ularning Li qavsi  $Z = [X, Y]$  quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi birorta  $Z$  vektor maydon bo'ladi. bu yerda  $f$  - ixtiyoriy silliq funksiyadir.  $f : M \rightarrow R^1$

Lokal koordinatalarda  $X, Y$  silliq vektor maydonlarning ko'rinishi quyidagicha  $X = \sum_i X^i \vec{e}_i$ ,  $Y = \sum_j Y^j \vec{e}_j$  bo'lsa, u holda quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi.  $Z(f) = [X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$

$$Z = [X, Y] = \sum_i X(Y^i) - Y(X^i) \vec{e}_i = \sum_i \sum_j (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j}) \vec{e}_i$$

$$Z^i = \sum_j (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j})$$

**Ta'rif 2.** Berilgan  $X$  vektor maydon va  $\gamma$  egri chiziq uchun har bir nuqtada

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

tengliklar o'rinli bo'lsa,  $\gamma$  chiziq  $X$  vektor maydonning integral chizig'i deyiladi. Bu yerda  $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  lar  $X$  vektor maydonning koordinata funksiyalari deyiladi.

Bu tengliklarni umumiy holda quyidagicha ham yozish mumkin:  
 $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

Bu yerda  $\gamma'(t)$  bilan  $\gamma(t)$  chiziqning  $t$  nuqtadagi urinma vektori.

**Ta’rif 3.** Berilgan  $X$  vektor maydonning  $t=0$  da  $p=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  nuqtadan o‘tuvchi integral chiziqni  $\gamma(t, p)$  bilan belgilasak  $p \rightarrow X^t(p)$  akslantirish  $X$  vektor maydonning oqimi deyiladi

**Ta’rif 4.** Agar har bir  $t$  nuqta uchun  $x \rightarrow \gamma(t, x)$  akslantirish izometrik akslantirish bo‘lsa,  $X$  vektor maydon Killing vektor maydoni deb ataladi.

$D$ -vektor maydonlar oilasi va  $M$   $n$  o‘lchamli silliq ko‘pxillik berilgan bo‘lsin.

**Ta’rif 5.**  $D$  vektor maydonlar oilasining  $x$  nuqtadan o‘tuvchi orbitasi  $L(x)$  shunday  $y \in M$  nuqtalar to‘plamiki, u  $D$  oilaning  $X_1, X_2, \dots, X_k$  vektor maydonlari va  $t_1, t_2, \dots, t_k$  haqiqiy sonlar uchun  $y = X_k^{t_k} \left( X_{k-1}^{t_{k-1}} \left( \dots \left( X_1^{t_1} (x) \right) \dots \right) \right)$  kabi aniqlanadi.

**Teorema 1.**  $R^n$  fazoda shunday ikkita  $X$  va  $Y$  Killing vektor maydonlar topiladiki, ulardan tuzilgan  $D = \{X, Y\}$  oilaning orbitasi uchun quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi

$$L_D = R^n.$$

Bu teorema har bir  $n$  uchun masalan  $n=2$  bo‘lganda quyidagi  $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  hamda  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$  vektor maydonlarni o‘z ichiga olgan  $D = \{X, Y\}$  oilaning bazis vektorlarini  $X$  va  $Y$  vektor maydonlarning Li qavsini  $Z = [X, Y]$  va bular ortqali hosil qilinadigan Li qavslari hisoblashlar bilan topiladi.

### ABOUT A PROBLEM ON $\tau$ -BOUNDED SPACES

*Zaitov Adilbek Atakhanovich, Karimov Sardor Yashinovich*

*Tashkent University of Architecture and Civil Engineering, Tashkent, Uzbekistan*

*Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan*

*e-mail: [sunnattaqir@gmail.com](mailto:sunnattaqir@gmail.com), [mr\\_man89@mail.ru](mailto:mr_man89@mail.ru)*

In this paper we investigate some properties of  $\tau$ -bounded spaces and get a negative decision for a well-known problem about local density and density of  $\tau$ -bounded spaces. Throughout the paper  $\tau$  is an infinite cardinal number.

**Definition 1**[1]. A space  $X$  is called  $\tau$ -bounded, if the closure in  $X$  of every subset of cardinality at most  $\tau$  is compact.

It is well known that every closed subset of a  $\tau$ -bounded space is  $\tau$ -bounded. We obtained that any subset of a  $\tau$ -bounded space is also  $\tau$ -bounded. Clearly, the last result improves the front one. Let us formulate this statement.

**Theorem 1.** Any subset of a  $\tau$ -bounded space is  $\tau$ -bounded.

**Definition 2**[2]. We say that a topological space  $X$  is locally  $\tau$ -dense at a point  $x \in X$  if  $\tau$  is the smallest cardinal number such that  $x$  has a  $\tau$ -dense neighborhood in  $X$ .

The local density at a point  $x$  is denoted by  $ld(x)$ . The local density of a space  $X$  is defined as the supremum of all numbers  $ld(x)$ ,  $x \in X$ ; this cardinal number is denoted by  $ld(X)$ .

If  $ld(X) \leq \aleph_0$  for a space  $X$ , we say that  $X$  is locally separable.

**Definition 3**[2]. A subset  $M$  of a topological space  $X$  is (everywhere) dense in  $X$  if  $[M] = X$ .

The density of a topological space is defined with following way:

$$d(X) = \min\{|M|: M \text{ is a dense subset of } X\}.$$

If  $d(X) \leq \aleph_0$  for a space  $X$  we say that  $X$  is separable.

The following problem was still open:

**Problem 1.** Do  $\tau$ -boundedness of  $X$  and equality  $ld(X) \leq \tau$  provide equality  $d(X) \leq \tau$  ?

We achieve a negative answer, building a counterexample.

**Example 1.** In the plane  $R^2$  consider two concentric circles

$$C_i = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = i\}, \quad i = 1, 2,$$

and their union  $X = C_1 \cup C_2$ ; the projection of  $C_1$  onto  $C_2$  from the point  $(0,0)$  will be denoted by  $p$ . On the set  $X$  we will generate a topology by defining a neighborhood system  $\{B(z)\}_{z \in X}$ ; namely let  $B(z) = \{\{z\}\}$  for  $z \in C_2$  and for  $z \in C_1$  let

$$B(z) = \{U_j(z)\}_{j=1}^{\infty}.$$

Here  $U_j = V_j \cup p(V_j \setminus \{z\})$  and  $V_j$  is the arc of  $C_1$  with the center at  $z$  and of the length  $1/j$ . One easily verifies that the collection  $\{B(z)\}_{z \in X}$  has properties  $(BP_1) - (BP_4)$  [2], so that, by Proposition 1.5.2[2] the set  $X$  with the topology generated by the neighborhood system  $\{B(z)\}_{z \in X}$  is a Hausdorff space.

The space  $X$  is called the *Alexandroff double circle*. It is a compact space [2]. For each cardinal number  $\tau$  every compact space is  $\tau$ -bounded as well.

Obviously,  $ld(X) \leq \omega$ . On the other side  $X$  is  $\omega$ -bounded. Unfortunately, we have  $d(X) = \omega_1$ , which implies  $d(X) > \omega$ .

Thus, Problem 1 has a negative inference.

### References:

- [1] O. Okunev, The minitightness of products, *Topology and its applications* 208 (2016) pp. 10–16.  
 [2] R. Engelking, *General topology*, Helderman Verlag Berlin, 1989.

## ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ $\mathfrak{Sp}(4n)$

*С. С. Журабоев, Р. А. Гаффоров*

*Ферганский государственный университет*

[saidaxbor.juraboyev@mail.ru](mailto:saidaxbor.juraboyev@mail.ru), [gafforov.rahmatjon@mail.ru](mailto:gafforov.rahmatjon@mail.ru)

Пусть  $H^n$  –  $n$ -мерное векторное пространство над телом кватернионов  $H$ . Известно, что  $H^n$  можно рассматривать как  $4n$ -мерное вещественное векторное пространство. Обозначим это вещественное векторное пространство через  $V$ .

Пусть  $G = \mathfrak{Sp}(4n)$  групп вещественные представление группа  $Sp(n)$  подгруппа в  $GL(4n, R)$ , т.е

$$\mathfrak{Sp}(4n) = \{g \in GL(4n, R) : gg^T = E, gI g^T = I, gJ g^T = J, gK g^T = K, \det g = 1\},$$

где  $E$  –  $4n$ -мерная единичная матрица, а матрицы  $I, J, K$  соответственно имеют в виде:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & \theta & \dots & \theta \\ \theta & I_1 & \dots & \theta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \theta & \theta & \dots & I_1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & \theta & \dots & \theta \\ \theta & J_1 & \dots & \theta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \theta & \theta & \dots & J_1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & \theta & \dots & \theta \\ \theta & K_1 & \dots & \theta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \theta & \theta & \dots & K_1 \end{bmatrix};$$

В этом случаи, матрицы  $\theta$ -,  $I_1$ ,  $J_1$  и  $K_1$  соответственно 4-мерное нулевая матрица и 4- мерное симплектическая матрицы, т.е

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Также,  $g^t$  -транспонированная матрица  $g$ .

В дальнейшем через  $\mathfrak{I}$  обозначать интервал  $(a,b)$  из  $R$  (возможны случаи, когда  $a = -\infty$  или  $b = +\infty$ ).  $\mathfrak{I}$  – путь в  $V$  называется вектор-функция  $\vec{x}(t) : \mathfrak{I} \rightarrow V$ ,  $\vec{x}(t) = \{x_l(t)\}_{l=1}^{4n}$ , у которой все координатные отображения  $x_l : \mathfrak{I} \rightarrow R$  являются бесконечно дифференцируемыми функциями, [2].

$\mathfrak{I}$  – путь  $\vec{x}(t)$  называется *регулярным*, если  $\vec{x}^{(1)}(t) := x'(t) \neq 0$  для всех  $t \in \mathfrak{I}$ . Для каждого  $\mathfrak{I}$  – пути  $\vec{x}(t) = \{x_l(t)\}_{l=1}^{4n}$  через  $M(\vec{x})(t)$  обозначим  $4n \times 4n$  – матрицу  $(x_l^{(m-1)}(t))_{l,m=1}^{4n}$ , где  $l$  –ый строкей имеет координаты  $x_l^{(m-1)}(t)$ ,  $x_l^{(0)}(t) = x_l(t), l, m = \overline{1, 4n}$ . Через  $M'(\vec{x})(t)$  обозначается матрица  $(x_l^{(m)}(t))_{l,m=1}^{4n}$ .  $\mathfrak{I}$  – путь  $\vec{x}(t)$  называется *сильно регулярным*, если определитель  $\det M(\vec{x})(t)$  не равно нулю при всех  $t \in \mathfrak{I}$ , [2].

Пусть  $G$  –подгруппа группы  $GL(4n, R)$ . Два  $\mathfrak{I}$  –пути  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{y}(t)$  называются  $G$  –*эквивалент*, если существует такой элемент  $g \in G$ , что  $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)g$  для всех  $t \in \mathfrak{I}$ .

Пусть группа  $G = \text{Sp}(4n)$ . Следующая теорема определяет необходимые и достаточные условия  $G$ -эквивалентности сильно регулярных  $\mathfrak{S}$ -путей  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{y}(t)$  с помощью матриц  $M(\bar{x})(t)$  и  $M(\bar{y})(t)$ .

**Теорема.1** *Два сильно регулярных  $\mathfrak{S}$ -путей  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{y}(t)$   $G$ -эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства для всех  $t \in \mathfrak{S}$ :*

$$i_1) M'(\bar{x})(t)(M(\bar{x})(t))^{-1} = M'(\bar{y})(t)(M(\bar{y})(t))^{-1};$$

$$i_2) M(\bar{x})(t)(M(\bar{x})(t))^t = M(\bar{y})(t)(M(\bar{y})(t))^t;$$

$$i_3) M(\bar{x})(t)I(M(\bar{x})(t))^t = M(\bar{y})(t)I(M(\bar{y})(t))^t;$$

$$i_4) M(\bar{x})(t)J(M(\bar{x})(t))^t = M(\bar{y})(t)J(M(\bar{y})(t))^t;$$

$$i_5) M(\bar{x})(t)K(M(\bar{x})(t))^t = M(\bar{y})(t)K(M(\bar{y})(t))^t;$$

$$i_6) \det M(\bar{x})(t) = \det M(\bar{y})(t)$$

где  $(M(\bar{x})(t))^t$  – транспонированная матрица к матрице  $M(\bar{x})(t)$ .

### Список литературы:

1. Журабоев С. С. Эквивалентность путей относительно действия групп вещественных представлений  $\text{Sp}(n)$  // Классическая и современная геометрия, 2021, с. 70-72.
2. Khodyrovich M. K., Solyjonovich J. S. Equivalence of Paths under the Action of the Real Representation of  $\text{Sp}(n)$  // Journal of Applied Mathematics and Physics. 10, 2022. с. 1837–1858.
3. Муминов К. К., Гаффоров Р. А. Системы матричных дифференциальных уравнений для поверхностей // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 68, № 1, 2022, с. 70–79.

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ОСОБОЙ СЛУЧАЕ ПО ПОЛНОЙ КРИВИЗНЕ В МНОГОМЕРНОМ ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Исмоилов Шерзодбек<sup>1</sup>, Турдиев Шодмон<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Ташкентский Государственный Транспортный Университет,  
Ташкент, Узбекистан,*

*<sup>2</sup>Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан.*

*e-mail: sh.ismoilov@niu.uz*

В работе [2] рассмотрена задача существования поверхности, когда полная  $K$  и средняя  $H$  кривизны поверхности постоянны, а в этой работе [5] проблема решается существования поверхности, , когда полной и средней кривизнами поверхности является произвольна заданная функция в трехмерном пространстве.. Эту задачу мы рассмотрим особой случае, когда полной и средней кривизнами поверхности является произвольна заданная функция в многомерной изотропной пространстве. В частности, рассмотрим эту задачу в классе поверхностей переноса. Рассматриваемая задача в  $R_{n+1}^n$  существенно зависит от того, каким образом определены поверхность переноса.

Пусть  $Ox_i$  ( $i = \overline{1, (n+1)}$ ) - система координат в аффинном пространстве  $A_{n+1}$ . Скалярное произведение векторов  $\vec{X}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  и  $\vec{Y}(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$  определим по формуле

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i y_i, & \text{если } \sum_{i=1}^n x_i y_i \neq 0, \\ x_{n+1} y_{n+1}, & \text{если } \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

**Определение 1.** Аффинное пространство  $A_{n+1}$ , в котором скалярное произведение векторов вычисляется по формуле (1), называется изотропным пространством  $R_{n+1}^n$  [1].

**Утверждение 2.** Изотропное пространство  $R_{n+1}^n$  является подпространством  $(n+2)$ -мерного пространства Минковского  ${}^1R_{n+2}$  [6].

Поверхность переноса взаимно однозначно проектируется на  $i$ -ю координату гиперплоскости. Напомним, что эта гиперплоскость является изотропным пространством. Тогда векторное уравнение поверхности переноса имеет вид:

$$\vec{r}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^{k-1} u_i \cdot \vec{e}_i + \left( \sum_{j=1}^n f_j(u_j) \right) \cdot \vec{e}_k + \sum_{i=k+1}^n u_i \cdot \vec{e}_i;$$

Вычислим полную и среднюю кривизны этой поверхности. Для этого вычислим значения коэффициентов первой и второй квадратичной формы, а также полученные через них определители.

**Теорема 1.** Если дана функция  $K = \prod_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$  для особой случае, то существует поверхность

$$\begin{aligned} \vec{r}_\lambda(u_1, \dots, u_n) = & \sum_{i=1}^{k-1} u_i \cdot \vec{e}_i + \left( \lambda_1 \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \iint_D \varphi_i(x_i) dx_i + \lambda_1 \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} \mu_k} \iint_D \varphi_n(x_n) dx_n + \right. \\ & \left. + \lambda_1 \sum_{i=1}^{n-1} (C_1^i x_i + C_i^2) + \int \left( -(n+1) \int \frac{\varphi_n(x_n)}{\lambda_1} dx_n \right)^{\frac{-1}{n+1}} dx_n \right) \cdot \vec{e}_k + \sum_{i=k+1}^n u_i \cdot \vec{e}_i, \end{aligned}$$

для которой она является полной кривизной, где  $C_i$  – постоянные числа и  $\varphi_i(u_i) \in C^2(D)$ .

#### Список использованных источников:

1. Artykbaev A, Ismoilov Sh., The dual surfaces of an isotropic space. Bull. Inst. Math., 2021, Volume 4, Issue 1, pp. 1-8.
2. Lone M.S., Karacan M.K., Dual translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space, Tam.j.math. Vol-49, Issue 1, 67-77, 2018.
3. Aydin M.E., Classification of surfaces in isotropic and pseudo-isotropic spaces, Ukrainian Mathematical Journal, 2020, Volume-72(3), pp. 329-347.

4. Mikes J., Differential geometry of special mappings. Palacky Univ. Press, Olomouc, 2019.
5. Artykbaev A, Ismoilov Sh., Surface recovering by a give total and mean curvature in iso-tropic space R, Palestine Journal of Mathematics, vol-11(3), (2022), Pp. 351-361.
6. Artykbaev A, Ismoilov Sh., Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic spaces, International electronic journal of geometry, 2022, vol-15, Issue 1, Pp. 1-10.
7. Ismoilov Sh.Sh., Geometry of the Monge - Ampere equation in an isotropic space, Uzbek Mathematical Journal, vol-66, issue-2, (2022), Pp. 66-77

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ МИНКОВСКОГО В СЛОЕНИЯХ

*Маматов Маширабжон Шахабутдинович*

*Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека*

*tamatovmsh@mail.ru*

*Нуритдинов Жалолхон Турсунбой угли*

*Кокандский Педагогический институт*

*nuritdinovjt@gmail.com*

Пусть в  $R^n$  задано  $M$  выпуклое компактное и  $N$  компактное множество. Следуя, И.Тамура [1] предположим, что на  $M$  определено такое слоение  $F = \{L_\alpha; \alpha \in A\}$ , что для некоторого слоя будет выполнено условие  $\alpha_0 \in A, L_{\alpha_0} = \partial M_{\alpha_0} \equiv \partial M$ . Множество ограниченное слоем  $L_\alpha$  обозначим  $M_\alpha, \partial M_\alpha = L_\alpha, \alpha \in A$ . Предполагается, что  $M_\alpha, \alpha \in A$  также выпуклые компактные множества и замкнуто относительно операции геометрической разности, т.е. если  $M_\alpha \overset{*}{-} M_\beta \neq \emptyset$ , существует такое  $\gamma \in A$ , что имеет место  $M_\alpha \overset{*}{-} M_\beta = M_\gamma$  [2-3].

Пусть  $M, N$  два подмножества пространства  $R^n$ , тогда множество  $E = \alpha M + \beta N$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  - фиксированные действительные числа, определяется как совокупность всех  $z = \alpha x + \beta y$ , где  $x \in M, y \in N$ . Ясно, что если  $M, N$  выпуклые множества, то  $E$  выпукло, если оба множества  $M$  и  $N$  компактны, то множество  $E$  также компактно[2].

**Определение 1.** Пусть  $M, N$  два подмножества пространства  $R^n$ , тогда геометрическая разность этих множеств определяется  $D = M \overset{*}{-} N$  как совокупность всех таких точек  $z \in R^n$ , для которых  $z + N \subset M$ . Ясно, что  $D + N \subset M$ , причем  $D$  есть максимальное множество, удовлетворяющее этому условию. Известно, что если  $M$  выпуклый компакт и  $N$  компакт то  $D = M \overset{*}{-} N$  выпуклый компакт.

**Лемма.** Если для множеств  $M, M_\alpha, N$  выполнено условие  $N \subset M_\alpha$  то для них имеет место равенство

$$M \overset{*}{-} N = (M \overset{*}{-} M_\alpha) + (M_\alpha \overset{*}{-} N). \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть  $z \in M \overset{*}{-} N$ , покажем, что существуют такие  $z_1 \in M \overset{*}{-} M_\alpha$  и  $z_2 \in M_\alpha \overset{*}{-} N$ , для которых выполняется равенства  $z = z_1 + z_2$ . Используя определение геометрической разности Минковского, для  $z \in M \overset{*}{-} N$  можем написать включение  $z + N \subset M$ . Значит для любого  $c \in N$  существует такое  $a \in M$ , что для них имеет место равенство  $z + c = a$ . Отсюда получим соотношение

$$c = a - z \in N. \quad (2)$$

По условию  $N \subset M_\alpha$ , значит  $M_\alpha \overset{*}{-} N \neq \emptyset$ . Пусть  $z_2 \in M_\alpha \overset{*}{-} N$ , отсюда следует, что  $z_2 + N \subset M_\alpha$ . Это соотношение имеет место для всех элементов множества  $N$ . Значит в силу (2) имеет место включение

$$z_2 + a - z \in M_\alpha. \quad (3)$$

По условию  $M \overset{*}{-} M_\alpha \neq \emptyset$ , пусть  $z_1 \in M \overset{*}{-} M_\alpha$ . Значит имеет место включение

$z_1 + M_\alpha \subset M$ . Это соотношение имеет место для всех элементов множества  $M_\alpha$ , тогда в силу (3) для элемента  $z_2 + a - z$  тоже имеет место

$$z_2 + z_1 + a - z \in M. \quad (4)$$

Так как  $a \in M$ , тогда  $z_1 + z_2 - z = 0$  и значит, имеет место  $z_1 + z_2 = z$  равенство.

Пусть теперь  $z \in (M * M_\alpha) + (M_\alpha * N)$ , тогда существуют такие  $z_1 \in M * M_\alpha$  и  $z_2 \in M_\alpha * N$ , что  $z_1 + z_2 = z$ . Из соотношения  $z_1 \in M * M_\alpha$  в силу определения геометрической разности получим  $z_1 + M_\alpha \subset M$ . Точно также из соотношения  $z_2 \in M_\alpha * N$  получим включение  $z_2 + N \subset M_\alpha$ .

Из последних двух включений (3),(4) получим  $z_1 + z_2 + N \subset M$ , а отсюда имеем  $z_1 + z_2 \subset M * N$ . Лемма доказана.

**Определение 2.** Будем говорить, что компактное множество  $N$  можно вложить слоения  $F$  если существуют такой слой  $L_\alpha \in F$  и вектор  $z \in \mathbb{R}^n$ , что для них выполнено соотношение  $z + N \subset M_\alpha$ .

**Определение 3.** Будем говорить, что компактное множество  $N$  плотно вложено слоение  $F$  если из того что  $z + N \subset M_{\alpha_0}$ ,  $z + N \subset M_{\alpha_1}$ ,  $M_{\alpha_1} \subset M_{\alpha_0}$  следует равенство  $M_{\alpha_1} = M_{\alpha_0}$ .

Из этого определения легко можно понять, что если компактное множество  $N$  плотно вложено слоение  $F$ , тогда размерность геометрической разности  $M_\alpha * N$  будет меньше чем  $n$ .

**Определение 4.** Будем говорить, что компактное множество  $N$  вполне плотно вложено слоение  $F$  если существует такой слой  $L_\alpha \in F$  для соответствующего  $M_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  геометрическая разность является единственной точки:  $M_\alpha * N = \{a\}$ .

**Теорема.** Если компактное множество  $N$  вполне плотно вложено в слоение  $F$  тогда для геометрической разности множеств  $M, N$  имеет место равенств

$$M \dot{*} N = (M \dot{*} M_\alpha) + a. \quad (5)$$

**Доказательство теоремы.** В силу (1) теоремы для геометрической разности множеств  $M, N$  имеем  $M \dot{*} N = (M \dot{*} M_\alpha) + (M_\alpha \dot{*} N)$ . Из условия теоремы (5) множество  $N$  вполне плотно вложено в слоение  $F$  тогда  $M_\alpha \dot{*} N = \{a\}$ , определение 4. Из этих двух равенств получим  $M \dot{*} N = (M \dot{*} M_\alpha) + a$ . Теорема доказана.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР:

1. Tamura I., Topology of foliations. Moscow, Mir, 1979, 317p (Russian).
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сборник. – Москва. 1980. – Т. 112. – № 3. – С. 307-330.

## О ПРОЕКТИВНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

### ПРОСТРАНСТВА $X^n$

*Манасыпова Резида Замир кизи, Исмоилов Давронбек Илхомжон угли*

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*

*[rezidabadrutdinova@gmail.com](mailto:rezidabadrutdinova@gmail.com), [davronbekismoilov343@gmail.com](mailto:davronbekismoilov343@gmail.com)*

Пусть  $\varphi$  - некоторая кардинальная функция, определённая на классе топологических пространств  $C$ . Определим на  $C$  проективный вариант  $r\varphi$  для функции  $\varphi$ . Для всякого  $X \in C$  допустим, что  $r\varphi(X)$  есть точная верхняя грань значений  $\varphi(Y)$ , где  $Y \in C$  меняется на множестве всех непрерывных образов  $X$  [1]. В частности, мы рассмотрим случай, в котором  $\varphi = Id$ , локальная плотность, определённая на классе топологических пространств  $C$ .

**Определение.** [2] Подмножество  $M$  топологического пространства  $X$  плотно в  $X$ , если  $[M] = X$ .

Плотность топологического пространства определяется следующим способом:

$$d(X) = \min\{|M| : M \text{ – плотно в } X\}.$$

Если  $d(X) \leq \omega$ , то  $X$  называется сепарабельным пространством.

**Теорема.**[2]. Пусть  $Y$  - непрерывный образ пространства  $X$ ; тогда  $d(Y) \leq d(X)$ .

Плотность пространства не превышает его мощности.

**Определение.**[3] Топологическое пространство  $X$  называется локально  $\tau$ -плотным в точке  $x \in X$ , если  $\tau$  - наименьший кардинал такой, что  $x$  имеет  $\tau$ -плотную окрестность в  $X$ .

Локальная плотность в точке  $x$  обозначается через  $ld(x)$ .

Локальная плотность пространства  $X$  определяется как точная верхняя грань всех чисел  $ld(x)$  для  $x \in X$ . Этот кардинал обозначается через  $ld(X)$ .

Можно вывести следующее

**Определение.** Проективной локальной плотностью топологического пространства  $X$  называется точная верхняя грань значений  $ld(Y)$ , где топологическое пространство  $Y$  меняется на множестве всех непрерывных образов  $X$ , т.е.,

$$pld(X) = \sup\{ld(Y) \mid Y \text{ – непрерывный образ } X\}.$$

**Теорема.** Проективная локальная плотность пространства  $X$  не превышает проективную локальную плотность пространства  $X^n$ .

### Литература:

1. I. Juhász and Z. Szentmiklóssy, *The projective  $\pi$ -character bounds the order of a  $\pi$ -base*. Proceedings of The American Mathematical Society Vol. 136, N. 8, August 2008, pp 2979–2984 S 0002-9939(08)09315-5
2. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, М.: Мир, 1986.
3. R. B. Beshimov, F. G. Mukhamadiev and N. K. Mamadaliev, *The Local Density and The Local Weak Density of Hyperspaces*, International Journal of Geometry Vol. 4 (2015), No. 1, 42 – 49

# АССОЦИАТИВНОСТЬ АЛГЕБР ПОРОЖДЕННЫХ КОСЫМЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

*Мирходжаева Наджиба*

*Ташкентский государственный экономический университет*

*najibaxon\_7@mail.ru*

Пусть  $V_1: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  и  $V_2: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  - квадратичные стохастические операторы, где  $S^{n-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n): x_1 + \dots + x_n = 1\}$  и  $S^{m-1} = \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m): y_1 + \dots + y_m = 1\}$

На симплексе

$$S^{n+m-1} = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m): x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_m = 1\}$$

определим оператор  $V = V_1 \times V_2$  полагая

$$(V(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_i = (V_1(\mathbf{x}))_i + g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ для } i = 1, \dots, n$$

$$(V(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{n+j} = (V_2(\mathbf{y}))_j + g_{j+n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ для } j = 1, \dots, m$$

где  $\sum_{k=1}^{n+m} g_k = 2(x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_m)$ .

Так определенный оператор называется косым произведением операторов  $V_1$  и  $V_2[1]$ .

Пусть  $V_1: S_1^1 \rightarrow S_1^1$  и  $V_2: S_2^1 \rightarrow S_2^1$  квадратичные стохастические операторы на  $S_1^1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2), x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$

$$S_2^1 = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2), y_1, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1\},$$

$$\text{где } V_1 : \begin{cases} (V_1(x_1, x_2))_1 = a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2 \\ (V_1(x_1, x_2))_2 = (1 - a_1)x_1^2 + 2(1 - b_1)x_1 x_2 + (1 - c_1)x_2^2 \end{cases}$$

$$V_2 : \begin{cases} (V_2(y_1, y_2))_1 = a_2 y_1^2 + 2b_2 y_1 y_2 + c_2 y_2^2 \\ (V_2(y_1, y_2))_2 = (1 - a_2)y_1^2 + 2(1 - b_2)y_1 y_2 + (1 - c_2)y_2^2 \end{cases}$$

где  $0 \leq a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \leq 1$ .

Полагая  $y_1 = x_3, y_2 = x_4$ , рассмотрим следующее косое произведение  $V = V_1 \otimes V_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2 + 2\alpha_1 x_1 x_3 + 2\beta_1 x_1 x_4 \\ x'_2 = (1 - a_1)x_1^2 + 2(1 - b_1)x_1 x_2 + (1 - c_1)x_2^2 + 2\alpha_2 x_2 x_3 + 2\beta_2 x_2 x_4 \\ x'_3 = a_2 x_3^2 + 2b_2 x_3 x_4 + c_2 x_4^2 + 2(1 - \alpha_1)x_1 x_3 + 2(1 - \alpha_2)x_3 x_2 \\ x'_4 = (1 - a_2)x_3^2 + 2(1 - \beta_1)x_1 x_4 + 2(1 - \beta_2)x_2 x_4 + 2(1 - b_2)x_3 x_4 + (1 - c_2)x_4^2 \end{array} \right. \quad (2)$$

Алгебра порожденная ксо V- это алгебра A над полем действительных чисел с базисом  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и с таблицей умножения

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^n p_{ij,k} a_k. \quad (1)$$

В общем, алгебры, возникающие в генетике, являются коммутативными, но не ассоциативными. Ниже мы рассмотрим ассоциативные алгебры с генетической реализацией. Легко видеть, что n-мерная алгебра с генетической реализацией ассоциативна, если для

$$i, j, k, s = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^n P_{ij,r} P_{rk,s} = \sum_{r=1}^n P_{ir,s} P_{jk,r}$$

При выполнении ниже 8 условий оператор (2) порождает ассоциативную алгебру (см.[2]).

- |  |  |
|--|--|
| 1. $b_1(b_1 - 1) = c_1(a_1 - 1)$       | 2. $\beta_1(\beta_1 - 1) = 0$                        |
| 3. $(\beta_2 - \beta_1)(1 - a_1) = 0$  | 4. $b_1(\beta_1 - \beta_2) = \beta_1(1 - \beta_2)$   |
| 5. $(\beta_1 - \alpha_1)(1 - a_2) = 0$ | 6. $b_2(\beta_1 - \alpha_1) = \beta_1(1 - \alpha_1)$ |
| 7. $\alpha_2(\alpha_2 - 1) = 0$        | 8. $c_2(1 - a_2) = b_2(1 - b_2)$                     |

#### Литература:

1. T.Bier, Z.Dollah, N. Ganikhodjaev. Construction of non ergodic quadratic stochastic operators. Nonlinear Analysis and Phenomena II (2005), No.1, 1-14.
2. Nasir Ganikhodjaev and Gavhar Dustmuradova, On classification of associative non-division genetic algebras. AIP Conf. Proc. 1557, 26 (2013); doi: 10.1063/1.4823868

## ВЫЧЕТЫ И СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ

Тураева Набия Абдуллаевна-доцент кафедры «Дифференциальное уравнение» БГУ [nabiyaturaeva48@gmail.com](mailto:nabiyaturaeva48@gmail.com)

Тураев Жахонгир Ферузшохович- студент физико-математического факультета БГУ [jaxaraev99@gmail.com](mailto:jaxaraev99@gmail.com)

Вычеты и системы вычетов имеют не малую значимость в курсе алгебры и теории чисел, Совокупность целых чисел, дающих при делении на натуральное число  $m$  (модуль) один и тот же остаток  $r$ , образует *класс чисел* по этому модулю  $m$ . Все числа данного класса в общем виде записываются так:  $mk + r$ , где  $k$  – любое целое число. Число всех классов равно  $m$ .

Любое число класса называется **вычетом** по данному модулю  $m$  (по отношению ко всем числам того же класса).

Совокупность любых чисел, взятых из каждого класса по одному, называется **полной системой вычетов** по данному модулю  $m$ .

Обычно в качестве полной системы вычетов употребляется **полная система наименьших неотрицательных вычетов** по данному модулю  $m$ , т. е. система чисел:  $0, 1, 2, \dots, m - 1$ .

Иногда употребляется и **полная система наименьших по абсолютной величине неположительных вычетов** по данному модулю  $m$ , т. е. числа:  $-(m - 1), -(m - 2), \dots, -2, -1, 0$ .

Часто употребляется также **полная система абсолютно наименьших вычетов** по модулю  $m$ . Например, для  $m = 5$  этой системой будут числа:  $-2, -1, 0, 1, 2$ ; для  $m = 6$  – числа:  $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ , или  $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ .

Совокупность чисел, взятых из полной системы вычетов и взаимно простых с модулем  $m$ , называется **приведенной системой вычетов** по этому модулю  $m$ . Число чисел, составляющих приведенную систему вычетов равно  $\varphi(m)$ .

Употребляются те же три вида приведенной системы вычетов, что и полной системы, но теперь они носят названия: *приведенная система наименьших положительных вычетов, приведенная система наименьших по*

*абсолютной величине отрицательных вычетов и приведенная система абсолютно наименьших вычетов.*

**По простому модулю  $p$**  приведенная система наименьших вычетов отличается от полной системы только отсутствием вычета ноль и состоит из чисел:  $1, 2, 3, \dots, p-1$  – приведенная система наименьших положительных вычетов;  $-(p-1), -(p-2), \dots, -2, -1$   $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}$  – приведенная система наименьших по абсолютной величине отрицательных вычетов.

- приведенная система абсолютно наименьших вычетов.

### **Общее свойство полной и приведенной системы вычетов.**

Если числа  $x_1, x_2, \dots, x_s$  представляют собой полную ( $s = \varphi(m)$ ) или приведенную ( $s = \varphi(m)$ ) систему вычетов по модулю  $m$ , то и числа  $ax_1, ax_2, \dots, ax_s$ , где  $(a, m) = 1$ , также представляют собой соответственно полную или приведенную систему вычетов по модулю  $m$ .

**Пример:** Показать, что числа 25, -20, 16, 46, -21, 18, 37, -17 составляют полную систему вычетов по модулю  $m = 8$ .

**Решение:** По общему виду всех чисел данного класса находим:

$$\begin{array}{lll} 25 = 8 * 3 + 1; & -20 = 8 * (-3) + 4; & 16 = 8 * 2 + 0; \\ 46 = 8 * 5 + 6; & -21 = 8 * (-3) + 3; & 18 = 8 * 2 + 2; \\ 37 = 8 * 4 + 5; & -17 = 8 * (-3) + 7. & \end{array}$$

Полученные остатки все различны и составляют полную систему наименьших неотрицательных вычетов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, следовательно, и данные числа представляют собой полную систему вычетов (только не наименьших).

Можно было бы найти неположительные остатки, наименьшие по абсолютной величине или **абсолютно наименьшие**.

### **Литературы:**

1. Л.Я.Кулеков. Алгебра и теория чисел. Москва «Высшая школа» 1979г.
2. А.А.Бухштаб. Теория чисел Москва. 1966г.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

Тураева Набия Абдуллаевна-доцент кафедры «Дифференциальное уравнение» БГУ [nabiyaturaeva48@gmail.com](mailto:nabiyaturaeva48@gmail.com)

Тураев Жахонгир Ферузишохович- студент физико-математического факультета БГУ [jaxaraev99@gmail.com](mailto:jaxaraev99@gmail.com)

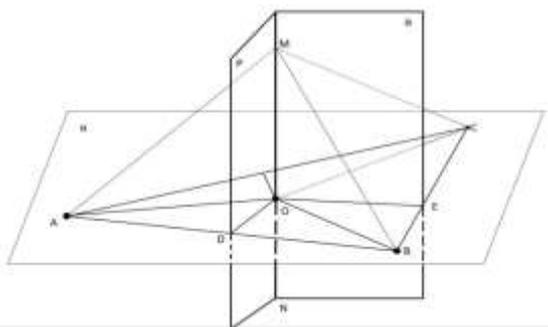
**Геометрическим местом в пространстве** называется фигура, которая состоит из всех точек пространства, обладающих определённым свойством.

**Перечислим несколько геометрических мест точек в пространстве.**

1. Геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных точек  $A$  и  $B$ , является плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная прямой  $AB$  и проходящая через середину отрезка  $AB$ .
2. Геометрическим местом точек, отстоящих от данной плоскости  $\alpha$  на расстоянии  $d$ , являются две плоскости, параллельные данной плоскости и находящиеся от неё на расстоянии  $d$ .
3. Геометрическим местом точек, удалённых на данном расстоянии  $d$  от данной точки  $O$ , является сфера с центром в точке  $O$  и радиусом  $d$ .

**Пример 1.** Найти в пространстве геометрическое место точек, равноудалённых от трёх данных точек, не лежащих на одной прямой.

Решение. 1-способ (рис. 1).



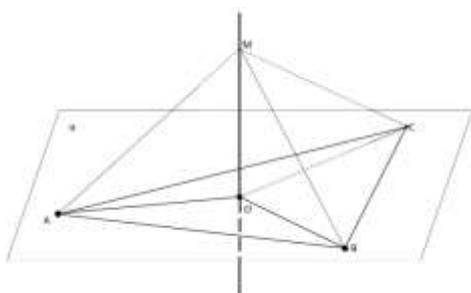
Три данные точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  определяют плоскость  $\alpha$ , в которой лежит  $\triangle ABC$ . Мы знаем, что геометрическое место точек, равноудалённых от точек  $A$  и  $B$ , есть плоскость  $P$ , перпендикулярная отрезку  $AB$  и проходящая через середину  $D$  стороны  $AB$ ; аналогично для точек  $B$  и  $C$  таким геометрическим местом точек будет плоскость  $Q$ . Точки, принадлежащие линии пересечения  $MN$  плоскостей  $P$  и  $Q$ , находятся на

одинаковом расстоянии от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Прямая  $MN$  – искомое геометрическое место точек.

Точка  $O$  пересечения прямой  $MN$  с плоскостью  $\alpha$  принадлежит геометрическому месту, следовательно, она находится на равном расстоянии от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  и является центром окружности, описанной около  $\triangle ABC$ . Далее, так как прямая  $AB \perp P$ , то прямая  $AB \perp MN$ , откуда  $MN \perp \alpha$ .

Вывод: искомое геометрическое место точек – прямая, перпендикулярная плоскости, определяемой данными точками  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и проходящая через центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

2-способ (рис. 2).

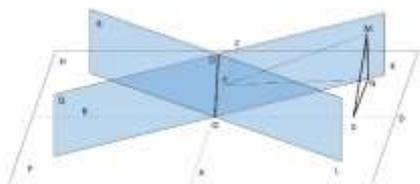


Пусть  $M$  – одна из точек искомого геометрического места точек, т. е.  $MA = MB = MC$ ,  $MO \perp \alpha$ . Наклонные  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  равны, следовательно, равны и их проекции на плоскость  $\alpha$ , т. е.  $OA = OB = OC$ .

Отсюда следует: 1)  $O$  – центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ ; 2) точки геометрического места проектируются в одну и ту же точку на плоскости  $\alpha$ , следовательно, все они лежат на перпендикуляре к плоскости  $\alpha$ , проходящем через точку  $O$ .

Пример 2. Найти в пространстве геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.

Решение. Пусть  $AC$  и  $BD$  – данные прямые (рис. 3)



$P$  – плоскость, ими определяемая. Пусть  $M$  – произвольная точка искомого геометрического места, т. е.  $MF \perp AC$ ,  $ME \perp BD$  и  $MF \perp ME$ . Опустим перпендикуляр  $MN$  на плоскость  $P$ ; тогда  $NF = NE$  как проекции равных наклонных  $MF$  и  $ME$  на плоскость  $P$ . Прямые  $AC$  и  $BD$  соответственно перпендикулярны наклонным, следовательно, они перпендикулярны их проекциям, т. е.  $AC \perp NF$  и  $BD \perp NE$ . Мы видим, что проекция произвольной точки геометрического места точек на плоскость  $P$ ,

определяемую данными прямыми, находится на одинаковом расстоянии от AC и BD. Как известно, геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых на плоскости, являются две прямые KO и HL, которые делят углы, образованные данными прямыми AC и BD, пополам. Все точки перпендикуляра MN, очевидно, принадлежат геометрическому месту точек. Построим плоскость Q через прямые MN и KO. Эта плоскость по Т. 2.9 перпендикулярна плоскости P. Все точки плоскости Q принадлежат искомому геометрическому месту точек.

Аналогично доказывается, что точки искомого геометрического места лежат также и на плоскости R, перпендикулярной плоскости P. Плоскости Q и R, перпендикулярны между собой, так как линейные углы  $\angle KOL$  и  $\angle KON$  прямые.

Итак, искомым геометрическим местом точек являются две плоскости Q и R, перпендикулярные плоскости P, причем плоскости Q и R перпендикулярны между собой и делят углы между данными прямыми пополам.

#### Литературы:

1. Александров Б.И. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы М.: Изд-во МГУ, 1972, 608с
2. Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н. Практикум по решению математических задач. М.: Просвещение, 1979, 239с
3. Герасимова И.С., Гусев В.А., Маслова Г.Г., и др. Сборник задач по геометрии. М.: Просвещение 1977, 190 с.

### **SUPERDERIVATION SPACES OF ZERO-FILIFORM LEIBNIZ**

#### **SUPERALGEBRAS WITH NILINDEX $m + 2$**

*Muhammadova Sh.S<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*National University of Uzbekiston, Tashkent, Uzbekistan*

[muhammadavo.sh@mail.ru](mailto:muhammadavo.sh@mail.ru)

This thesis is devoted to determine all even superderivation spaces of zero-filiform Leibniz superalgebras with nilindex  $m + 2$ .

**Definition 1.** [1]. A  $\mathbb{Z}_2$ -graded vector space  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}}$  is called a Leibniz superalgebra if it is equipped with a product  $[-, -]$  which satisfies the following conditions:

1.  $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subset \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ ;
2.  $[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{|\alpha||\beta|} [[x, z], y]$  for any  $x \in \mathcal{L}$ ,  $y \in \mathcal{L}_\alpha$ ,  $z \in \mathcal{L}_\beta$  (Leibniz superidentity).

Let consider the following sequences

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}]. \quad \mathcal{L}^{[1]} = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{[k+1]} = [\mathcal{L}^{[k]}, \mathcal{L}^{[k]}], \quad k \geq 1.$$

**Definition 2.** A Lie superalgebra  $\mathcal{L}$  is called nilpotent if there exists  $s \in \mathbb{N}$  such that  $\mathcal{L}^s = 0$  and the minimal natural number of  $s$  is called nilindex of  $\mathcal{L}$ .

**Theorem 1.** [2]. Let  $\mathcal{L}$   $m \geq 3$  with nilindex  $m+2$ . Then  $m$  is odd and  $\mathcal{L}$  is isomorphic to the following superalgebra:

$$L: \begin{cases} [x_1, x_1] = x_2, \\ [y_i, x_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ [x_1, y_i] = -y_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ [y_i, y_{m+1-i}] = (-1)^{m-i} x_2, & 1 \leq i \leq m-1. \end{cases}$$

**Theorem 2.** Any even superderivations of the algebra  $L$  has the following matrix form:

$$Der(L)_0: \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-m}{2}\alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_i & \dots & \beta_m \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5-m}{2}\alpha_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{i-1} & \dots & \beta_{m-1} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2i+1-m}{2}\alpha_1 & \dots & \beta_{m-i-1} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{m+1}{2}\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Now, let consider the following solvable Lie superalgebra:

$$RN^{(1,2)}: \begin{cases} |y_1, y_2| = x_1, & |y_1, z_1| = y_1, \\ |x_1, z_2| = x_1, & |y_2, z_2| = y_2, \\ |y_1, z_2| = x_1, \end{cases}$$

**Theorem 3.** Any even superderivations of the algebra  $RN^{(1,2)}$  has the following matrix form:

$$D(RN^{(1,2)})_0: \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

### Bibliography

1. **S.Albeverio, Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov**, On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. Algebra 33: 159-172, (2005).
2. **L.M.Camacho, J. R.G´omez, B.A.Omirov, A.Kh.Khudoyberdiyev** Complex Nilpotent Leibniz Superalgebras with Nilindex Equal to Dimension, Communications in Algebra, 41:7, 2720-2735, (2013).

## NYSTREM METHODS FOR APPROXIMATING SOLUTIONS OF AN INTEGRAL EQUATION ARISING FROM A MATHEMATICAL BIOLOGY PROBLEM

*Atamuratov A.R.*

*Urgench State University.*

*e-mail: [alijon\\_atamuratov@mail.ru](mailto:alijon_atamuratov@mail.ru),*

Problems of physics, mechanics of theoretical and practical importance are solved by the method of integral equations. Mathematical physics uses integral equations to solve problems. Therefore, it is important to find solutions to integral equations. But it is not always possible to find analytical solutions of integral equations. Thus, we study the numerical methods of integral equations, this paper shows how to find numerical solution to Volterra equation of the second kind using the MATLAB program. The results are compared with the exact solution by using computer simulations.

The linear Volterra equation of the second kind has the following form:

$$u(x) - \int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad (1)$$

Where  $u(x)$  is an unknown function,  $f(x)$  is a known function, and  $K(x,s)$  is another known function of two variables, often called the kernel of the integral equation. The homogeneous equation (for  $f=0$ ) has only a trivial solution, and the conditions for the existence of a solution of an inhomogeneous equation (1) are related to various restrictions on the kernel  $K(x,s)$  and  $f(x)$  ([1],[2]). In particular ([3]), a solution exists and is unique in the class of functions continuous on the interval  $[a,b]$  if the kernel is  $x=s$  and the function  $f(x)$  is continuous on  $[a,b]$ .

Equation (1) contains the integral operator

$$A\varphi(x) = \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds \quad (2)$$

It is clear that the values of the function  $\psi(x) = A\varphi(x)$  for any  $x$  are determined by the values of function  $\varphi(x)$  only for  $s < x$ . The integral operators characterized by this property are called Volterra operators and are widely used in the description of processes with aftereffect and feedback [1].

### References

- [1]. Verlan A.F., Sizikov V.S. Integral equations: methods, algorithms, programs. – Kiev.: Naukova Dumka, 1986. - 544 p.
- [2]. Manzhurov A.V., Polyanin A.D. Handbook of integral equations: solution methods. M.: Publishing House-Factorial Press, 2000.-384 p.
- [3]. Mikhlin S.G. Lectures on linear integral equation. M.: State publishing house of physical and mathematical literature, 1959. – 232 p.
- [4]. Bakhvalov N.S. Numerical methods. M.: Publishing house-Nauka, 1975.636p.
- [5]. Glazyrina L.L., Karchevsky M.M. An introduction to numerical methods: a tutorial. – Kazan. Un-t, 2012. - 122p.

- [6]. Krylov V.I. Approximate calculation of integrals. M.: Publishing house-Naukaa, 1967. – 384 p.
- [7]. Mikhlin S.G., Smolitsky H.L. Approximate Solution Methods differential and integral equations. M.: Publishing House Naukaa, 1965. – 384p.
- [8]. Mikhlin S.G. Variational methods in mathematical physics . M.: Publishing House. Naukaa, 1970. – 512p.
- [9]. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. Numerical methods Data analysis. Function approximation, differential and integral equations. M.: Naukaa Publishing House, 1967.363 p.
- [10]. Bakhvalov N.S. Numerical methods. M.: Naukaa Publishing House, 1975.- 632 p.

**MUNDARIJA**  
**СОДЕРЖАНИЕ**  
**CONTENTS**

**I SHO‘BA: MATEMATIK ANALIZ**

**СЕКЦИЯ №1: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**SECTION No.1: MATHEMATICAL ANALYSIS**

<b>Abdullaev J.I., Ergashova Sh.H.</b> Discrete spectrum of the Schrödinger operator to a system of three fermions.....	5
<b>Abduxakimov S.X., Muxammadiyev I.A., Vahobov M.A.</b> Ikki zarrachali diskret Shredinger operatorining spektral xossalari.....	7
<b>Aktamov F.S.</b> An open mapping theorem for order - preserving operators.....	9
<b>Aralova K.A. Xoliqova F.Q.</b> Regular dynamics of superposition of non-Volterra quadratic stochastic operators on $S^2$ .....	13
<b>Botirov G‘. I., Mustafoyeva Z. E.</b> Ground states for the Potts model with competing interactions on the Cayley tree.....	15
<b>Dilmurodov E.B.</b> Some properties of the first schur complement corresponding to a lattice spin-boson model with at most two photons.....	18
<b>Ergashova M.S., Azimova T.E., Boltaev Kh.Kh.</b> The two orthogonal projectors in separable gilbert space.....	22
<b>G‘ayratova M.H., Boboyarova N.A., Qutlimuratov D.S.</b> $\mathbb{C}^n [m \times m]$ fazodagi matritsaviy shar uchun Loran qatorlari.....	25
<b>Haydarov F.H., Ilyasova R.A.</b> Gradient Gibbs measures of sos model with alternating magnetism on Cayley tree: 3 – periodic, mirror symmetric boundary law.....	28
<b>Ikromova D.I.</b> On the estimates for Fourier transform of surface-carried measure.....	30
<b>Ismoilova D.E.</b> Location of the essential spectrum of the channel operator corresponding to the third-order operator matrix in the fermionic fock space....	33

<b>Jamilov U.U., Khudoyberdiev Kh.O.</b> On trajectories of a non–Volterra quadratic stochastic operator.....	36
<b>Jamilov U.U, Mukhitdinov R.T.</b> Non-ergodicity of Lotka-Volterra operators...	40
<b>Jamilov U.U., Rajabov S.M.</b> On dynamics of a non–Volterra quadratic stochastic operator .....	43
<b>Khakimov O.N.</b> On dynamics of $p$ -adic Potts-Bethe function.....	45
<b>Khakimov O.N.</b> Some properties of infinite dimensional quadratic stochastic operators.....	46
<b>Kulieva G., Eshimova M., Turaqulov T.</b> New proof for for the best constant of some Hardy-type inequality.....	49
<b>Otaboyev Sh.I.</b> Diskret nochiziqli Shredinger tenglamasining sonli yechimi to‘g‘risida.....	51
<b>Rahmatullayev M. M., Rasulova M. A, Asqarov J. N.</b> $G_2^{(2)}$ -periodic ground states for the Ising model with the competing interactions and a periodic external field .....	56
<b>Rasulov T.H.</b> Relative bounds and closedness of an unbounded operator matrices.....	58
<b>Ruzmetov K.Sh., Matyoqubov Z.Q., Abdullayev J.Sh.</b> Chegaralanmagan sohalarda Karleman integral formulasi.....	62
<b>Sattarov I.A., Darvishaliyeva Z.</b> Birinchi tartibli keli daraxtida sanoqli spin qiymatli hc modeli uchun umumlashgan $p$ -adik gibbs o‘lchovining mavjudligi..	65
<b>Sayliyeva G.R.</b> Uch o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega umumlashgan Fridriks modelining xos qiymatlari haqida.....	68
<b>Sharipova M.Sh.</b> Branches of the essential spectrum of the operator matrix of order three.....	70
<b>Tosheva N.A.</b> Uchnchi tartibli operatorli matritsalar oilasi uchun Birman - Shvinger prinsipi.....	73
<b>Xayitova X. G‘.</b> Matritsaviy model operator xos qiymatlariga mos Faddeyev tenglamasi.....	76

<b>Xudayarov S.S.</b> Examples of two-dimensional QnSO.....	79
<b>Халхужаев А. М., Мажидова М.Г.</b> Асимптотика собственных значений билапласиана с возмущением ранга один на одномерной решетке.....	84
<b>Халхужаев А.М., Боймуродов Ж.Х.</b> О числе собственных значений модельного оператора типа Шредингера на решетке.....	81
<b>Zhabborov N.M.,Husenov B.E.</b> Generalization of the cauchy integral formula for a class of functions $H_A^1$ .....	86
<b>Абдуллаев Ж.И., Тоштурдиев А.М.</b> Связанные состояния системы двух фермионов в подпространстве.....	89
<b>Аноров О.У., Шамсиддинов Н.Б.</b> Об абсолютно непрерывных квадратических стохастических операторах.....	92
<b>Даужанов А.Ш.</b> Ёмкостный аналог теоремы лузина о $C$ – свойстве.....	95
<b>Икромов И.А., Баракаев А.М.</b> О точных оценках для максимальных операторов.....	98
<b>Латипов Х.М.</b> Исследование существенного спектра одной операторной матрицы четвертого порядка.....	101
<b>Мадрахимов Р.М., Омонов О.И.</b> Уточнение леммы Лелона о плюригармонических функциях.....	105
<b>Умирзакова К.О.</b> Трансляционно-инвариантной меры Гиббса для одной подродных нс моделей.....	107
<b>Халхужаев. А.М., Хужамиеров И.А.</b> Условие существования собственного значения трехчастичного оператора Шредингера на решетке.....	110
<b>Мамуров Б. Ж.</b> О динамике одного невольтерровского квадратичного стохастического оператора.....	112

## II SHO‘BA: DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIK FIZIKA

### СЕКЦИЯ № 2: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

### SECTION No. 2: DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL

### PHYSICS

<b>Amrilloeva K.</b> Determination of the kernel for a time fractional diffusion equation with integral type over-determining conditions.....	115
<b>Aslonov U.</b> Aralash tipdagi tenglama uchun nolokal masala haqida.....	116
<b>Atoev D.D.</b> Inverse problem for integro-differential equation of parabolic type with nonlocal initial-boundary condition.....	118
<b>Babajanov B.A., Atajonov D.A.</b> On the integration of the periodic hunter–saxton equation with a self-consistent source.....	120
<b>Baltayeva U.I., Xasanov B.M.</b> O‘zgaruvchan koeffitsiyentli yuklangan issiqlik tarqalish integro-differensial tenglamasi uchun qo‘yilgan to‘g‘ri masala yechimining mavjudligi va yagonaligi.....	123
<b>Baxromova S.B.</b> Ko‘p o‘lchamli kasr to‘lqin tenglasining fundamental yechimini Foks funksiyasi orqali yozish.....	124
<b>Boltayeva G., Kurbonova K., Kodirova D.</b> Numerical Resolution of Unsteady Fokker-Planck Type Kinetic Equation.....	126
<b>Bozorova M., Omonova D.</b> Ikkinchi tartibli integro-differensial tenglama uchun bir teskari masala haqida.....	127
<b>Durdiev D.K., Boltaev A.A.</b> Kernel determination inverse problem in the Moore-Gibson-Thompson equation.....	129
<b>Durdiev D.K., Rahmonov A.A.</b> Global solvability of inverse coefficient problem for one fractional diffusion equation with initial non-local and integral overdetermination conditions.....	131
<b>Durdiev D.K., Turdiev H.H.</b> Inverse coefficient problem for fractional wave equation with riemann liouville derivative.....	131
<b>Elmuradova H.</b> An inverse problem of 1d pseudoparabolic integro-	

differential equation.....	133
<b>Fayziev Y.E., Dekhqonov K.T., Nosirov D.E., Makhmudov D.G'.</b> On the inverse problem for a Boussinesq type time-fractional subdiffusion equations...	135
<b>Fayziyev A.K.</b> Inverse problem for Whitham type multi-dimensional differential equation with impulse effects.....	137
<b>Guliyeva F.A.</b> Bessel funksiyasining integral ko'rinishi.....	140
<b>Ibragimov G.I., Tursunaliyev T.G.</b> A linear evasion differential game of one evader and one pursuer.....	140
<b>Ishankulov T., Mannonov M.</b> Bir jinsli bo'lmagan polianalitik tenglama yechimini davom ettirish.....	143
<b>Jovliyeva L.</b> Kasr tartibli aralash tipdagi tenglamalarda manbaa funksiyasini topish bo'yicha teskari masalani yechish.....	146
<b>Jumaev J.J.</b> Solvability of inverse problem for integro-differential heat equation with periodic and integral conditions.....	147
<b>Khasanov M.M., Ganjaev O.Y., Shermetova U.J.</b> A generalized ( $G'/G$ ) - expansion method for the loaded nonlinear Degasperis-Procesi equation .....	148
<b>Mamanazarov A.O., Muxtorov D.Q.</b> Umumlashgan Rosenau-Burger tenglamasi uchun chegaraviy masala yechimining mavjudligi haqida.....	150
<b>Matchonov N.A.</b> On the focusing nonlinear Schrödinger equation with non-zero boundary conditions and double poles.....	153
<b>Merajova Sh., Bekjonov M., Zoirov A.</b> Bir o'lchovli model integro-differensial issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun teskari masalani yechish.....	155
<b>Merajova Sh.B.</b> Integro-differensial model tenglamada yadroni aniqlash uchun teskari masala.....	157
<b>Mirzayev B.R.</b> Bir o'lchamli kasr tartibli diffuziya tenglamasidan manba funksiyasini aniqlash.....	159
<b>Nishonova Sh., Mo'ydinjonova B.</b> Elliptiko – giperbolik tipdagi tenglamalar	

uchun bir nolokal masala haqida.....	160
<b>Nuraliyeva N.Sh.</b> Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun vaqt bo'yicha nolokal shartli masala.....	163
<b>Nuriddinov J.Z.</b> O'zgaruvchan koeffitsiyentli parabolik tipdagi integro-differensial tenglama yadrosining yagonaligi to'g'risida.....	166
<b>Omonova D.D., Bozorova M.M.</b> Kaputo ma'nosidagi hosila va Riman-Liuvill ma'nosidagi integralni o'z ichiga oluvchi yuklangan oddiy differensial tenglama uchun bir masala haqida.....	169
<b>Raupova M.H.</b> Kvazichizikli aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masala.....	171
<b>Reyimberganov A.A., Matchonov N.A.</b> Integration of the loaded nonlinear Schrodinger equation via inverse scattering method.....	173
<b>Saidova N.M.</b> Pseudogiperbolik tenglamalar uchun chizikli teskari masalalar.....	176
<b>Samatov B.T., Turgunboeva M.A.</b> Differential game in the case of l-catch under non-stationary geometric constraints on controls.....	178
<b>Samatov B., Xolmirzayeva G.</b> Boshqaruvlari nostatsionar geometrik chegaralanishli hol uchun quvish-qochish masalasi.....	181
<b>Toshmatov D.Sh.</b> Noklassik chegaraviy masala uchun biortogonal sistema qurish.....	183
<b>Turdiev H., Xoliqov S.</b> Direct problem for fractional wave equation with Riemann Liouville derivative.....	184
<b>Urazboev G.U., Khasanov M.M., Ganjaev O.Y.</b> A generalized $(G'/G)$ -expansion method for the loaded shallow water wave equation.....	186
<b>Xusainov X.Y.</b> Hilfer ma'nosidagi kasr tartibli Diffrensial tenglamani Duyamel prinsipi yordamida yechish.....	191
<b>Yusubjonova G.</b> Bir integro-differensial tenglama uchun chegaraviy masala....	188
<b>Акрамова Д.И., Тагоев Ф.Е.</b> Обратная коэффициентная задача для дробно-диффузионного уравнения с оператором.....	193

<b>Апаков Ю.П., Мамажонов С.М.</b> О решение краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками.....	194
<b>Апаков Ю.П., Хамитов А.А.</b> О разрешимости третьей краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области.....	197
<b>Ашуров Р.Р, Дусанова У.Х.</b> Нелокальная задача для уравнения парабологиперболического типа с оператором Капуто в прямоугольной области.....	200
<b>Дурдиев Д.Қ., Тошев Д.А.</b> Решение задачи типа Коши-Гурса для волнового уравнения.....	203
<b>Дурдиев Д.Қ., Турдиев Х.Х., Суяров Т.Р.</b> Исследование двумерного волнового уравнения с начальными и нелокальными краевыми условиями.....	204
<b>Дурдиев У.Д., Бозоров З.Р.</b> Определение неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки.....	206
<b>Дурдиев У.Д., Жумаева М.Р.</b> Обратная задача по определению неизвестного коэффициента при младшем члене для уравнения колебания балки в бесконечной области.....	208
<b>Жуманиязов Н., Болтаева Г.</b> Численное решение уравнения прямой и обратной диффузии с переменными коэффициентами через схема типа кранка-никольсона .....	209
<b>Жуманиязов Н., Кодирова Д.</b> Прямой и итеративный метод для уравнения прямой и обратной диффузии с переменной коэффициенты.....	211
<b>Жуманиязов Н., Курбонова К.</b> Итеративный метод для уравнения прямой и обратной диффузии с переменной коэффициенты.....	213
<b>Журабоев С.С., Гаффоров Р.А.</b> Эквивалентность путей относительно действия группы $Sp(4n)$ .....	215
<b>Исломов Б.И.</b> Краевая задача для уравнения смешанного парабологиперболического типа дробного порядка в прямоугольной	

области.....	218
<b>Исломов Б.И., Ахмадов И.А.</b> Спектральные свойства задачи с условием франкля для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с дробным оператором Герасимова-Капуто.....	221
<b>Каримов К.</b> Задача с неполными граничными данными для уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в параллелепипеде.....	225
<b>Карчевский А.Л.</b> Прогноз газосодержания угольного пласта в процессе дегазации.....	227
<b>Маманазаров Д.С.</b> Нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка.....	228
<b>Меражов Н.И., Ашуров Р.Р.</b> Об однозначной разрешимости обратной начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии с дробной производной Капуто.....	229
<b>Расулов Х.Р.</b> О качественном анализе одного класса вксодп с непрерывным временем.....	231
<b>Расулов Х.Р., Баходурова М.Б.</b> Об анализе одного класса невольтерровских динамических систем с непрерывным временем.....	234
<b>Расулов Х.Р., Музаффарова М.У.</b> О качественном анализе одной динамической системы с непрерывным временем.....	236
<b>Сатторов Э.Н., Рустамов С.У.</b> О продолжении решений задачи Коши для обобщенной системы Коши-Римана с кватернионным параметром.....	238
<b>Сатторов Э.Н., Темирова Д.</b> Регуляризация решения задачи Коши для лапласова поля в ограниченной области.....	242
<b>Сатторов Э.Н., Эрмаматова З.Э., Рафиков Н.В.</b> О продолжении решений задачи Коши для уравнения Пуассона в ограниченной двумерной области.....	244
<b>Собиров Ш.К., Жуманазарова Ш.О., Матякубов Ж.Ш.</b> Решение задачи Коши для уравнения МКДФ с дополнительным членом и интегральным источником.....	247

<b>Сюнова Т.Г., Мамаюсупов Ж.Ш.</b> Интегральное преобразование Меллина для оператора интегродифференцирования дробного порядка....	250
<b>Умаров Р.А.</b> О единственности решения третьей краевой задачи для уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами.....	252
<b>Уринов А.К., Усмонов Д.А.</b> Нелокальная задача для вырождающегося уравнения второго порядка, содержащего интегро-дифференциальный оператор дробного порядка с функцией Бесселя в ядре.....	254
<b>Хасанов И.И.</b> Начально-краевая задача для адвекции-дисперсионного уравнения дробного порядка .....	257
<b>Хасанов Т.Г.</b> Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с дополнительными членами и с источником в классе быстроубывающих функций.....	259
<b>Хоитметов У.А</b> Об интегрировании модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с дополнительным членом.....	262
<b>Хоитметов У.А</b> Интегрирование уравнения мКдФ-синус-Гордона с дополнительными членами.....	265
<b>Юлдашева А.В.</b> Периодическая модель для гиперэластичных материалов.....	268

**III SHO‘BA: ALGEBRA VA GEOMETRIYA**  
**СЕКЦИЯ № 3: АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ**  
**SECTION No. 3: ALGEBRA AND GEOMETRY**

<b>Abdusalomova N.M.</b> Simplektik ko‘pxilliklar geometriyasi.....	271
<b>Arzikulov F.N., Nabijonova F.B.</b> Local automorphisms of jordan algebras of low dimension.....	274
<b>Arzikulov F.N., Urinboyev F.S.</b> On local inner derivations of Four-dimensional Jordan algebras.....	278
<b>Atamuradova D.R., Hamroqulova D.A., Ayubov K.M.</b> Hyperspace and dugundji compacta.....	285
<b>Boydadayev I.</b> Uch o‘lchamli nilpotent algebralarda ikki lokal differensiallash	288
<b>Jo‘rayev A.</b> Uch o‘lchamli ba‘zi nilpotent algebralarda ikki lokal avtomorfizmlar.....	290
<b>Jumayeva Ch.I.</b> Uch o‘lchamli Li algebralarning lokal ichki differensiallashlari.....	292
<b>Kamoldinov S.M.</b> Keli daraxti gruppaviy tasvirining qo‘shni sinflarda berilgan sonlarga ko‘ra radiusi 2 ga teng bo‘lgan sharlarda indeksi 4 bo‘lgan normal qism gruppasini qurish.....	294
<b>Khusanboeva Z.X., Shodiyonov N.J., Boltaev Kh.Kh.</b> $W^*$ - representations in real $W^*$ - algebras.....	296
<b>Mamadaliyev N.K., Eshtemirova Sh.</b> Continuity of the functor of hyperspaces with finitely many components.....	298
<b>Mamadaliyev N.K., Ibragimova U.B.</b> On local density and local weak density of stratifiable spaces.....	300
<b>Mamatov A.R., To‘qsonova I.</b> Parallelepipedda berilgan parametrga bog‘liq bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasining parametrlarining barcha qiymatlarida yechimi mavjud yoki mavjud emasligini aniqlashning sodda algoritmi.....	302
<b>Narkuziyev B.A.</b> Classification in one of the chains of three-dimensional real evolution algebras. ....	303
<b>Parmonov H.F.</b> Gamilton sistemalarining gamilton simmetriyalari.....	306

<b>Касимов О.Ю., Сатторов И.И.</b> О геометрии сингулярных римановых слоений в $R^3$ .....	308
<b>Topvoldiyev F.F.</b> Valuation of the conditional full angle of $n$ hedral angle.....	310
<b>Tursunov.B.A, Bozorov.M.A.</b> Bir dinamik sistemaning geometriyasi haqida	313
<b>Umrzaqov S.M.</b> Local derivations of filiform Zinbiel algebras.....	315
<b>Urazmatov G.Kh.</b> Maximal solvable extensions of low dimensional Heisenberg Lie algebras.....	317
<b>Yuldashev I.G'.</b> Derivations of semisimple Leibniz algebras.....	319
<b>Yusufjonov N.E, Mirzaraximov M.M.</b> $R^n$ fazoda shunday ikkita $X$ va $Y$ killing vektor maydanlardan tuzilgan $D = \{X, Y\}$ oilaning orbitasi.....	322
<b>Zaitov A.A., Karimov S.Y.</b> About a problem on $\tau$ -bounded spaces.....	324
<b>Журабоев С.С., Гаффоров Р.А.</b> Эквивалентность путей относительно действия группы $Sp(4n)$ .....	326
<b>Исмоилов Ш, Турдиев Ш.</b> Восстановление поверхности в особой случае по полной кривизне в многомерном изотропном пространстве.....	329
<b>Маматов М.Ш., Нуритдинов Ж.Т.</b> О некоторых свойствах геометрической разности минковского в слоениях.....	331
<b>Манасыпова Р.З., Исмоилов Д.И.</b> О проективной локальной плотности пространства $X^n$ .....	334
<b>Мирходжаева Н.</b> Ассоциативность алгебр порожденных косыми произведениями квадратичных стохастических операторов.....	336
<b>Тураева Н.А., Тураев Ж.Ф.</b> Вычеты и система вычетов.....	338
<b>Тураева Н.А., Тураев Ж.Ф.</b> Геометрическое место точек в пространстве.	340
<b>Muhammadova Sh.S.</b> Superderivation spaces of zero-filiform Leibniz superalgebras with nilindex $m + 2$ .....	342
<b>Atamuratov A.R.</b> Nystrem methods for approximating solutions of an integral equation arising from a mathematical biology problem.....	344